Espaces probabilisés.

Exercices 2017-2018.

Niveau 1.

Evénements et langage ensembliste.

1. Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisable et soient A, B, C des événements.
   Traduire les événements suivants en langage ensembliste :
   - l'un des trois événements au moins est réalisé,
   - un seul des trois événements est réalisé.

2. Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisable et soient A, B, C des événements.
   a. Montrer que $(A\cup B)\cap C$ entraîne $A\cup(B\cap C)$.
   b. A quelle condition y a-t-il égalité ?

Probabilité sur un ensemble fini.

3. Un QCM comporte 10 questions pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte.
   Quelle est la probabilité, en répondant au hasard, de répondre au moins 6 fois correctement ?

4. Un groupe composé de 8 hommes et de 6 femmes doit désigner 4 membres pour le représenter.
   Si la désignation de ces 4 membres se fait au hasard, quelle est la probabilité pour que le groupe des représentants soit composé d'autant d'hommes que de femmes ?

5. Déterminer une probabilité P sur : $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$, de telle sorte que $P(\{k\})$ soit proportionnel à k pour tout : $1\le k\le n$.

6. Déterminer une probabilité P sur : $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$, de telle sorte que $P(\{1,2,\dots,k\})$ soit proportionnel à k^2 pour tout : $1\le k\le n$.

7. On dispose de n boîtes et de k boules, avec : $1\le k\le n$.
   On dispose les boules dans les boîtes, sachant que le placement de chaque boule est indépendant des autres, et que les boîtes peuvent être choisies de façon équiprobable.
   Donner les probabilités des événements suivants :
   - chaque boîte contient au plus une boule,
   - une boîte contient toutes les boules,
   - une boîte contient au moins deux boules.

8. On lance un dé équilibré à six faces, plusieurs fois de suites (les lancers sont indépendants).
   a. Combien de fois au minimum faut-il lancer le dé pour que le 6 ait au moins une chance sur deux de sortir lors de ces tirages ?
   b. Même question en lançant deux dés, mais pour obtenir cette fois un double-six.

Probabilité sur un ensemble quelconque.

9. On pose : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   a. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$.
   b. Calculer la probabilité de l'événement : B = $\{n \in \mathbb{N},\ n\ge 10\}$.

10. Les égalités : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{n.(n+1)}$, permettent-elles de définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*,\mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$?

11. Soit : a $\in$]1,+∞), et : $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^a}$.

a. Montrer qu'en posant : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(a).n^a}$, on définit une probabilité sur ℕ*.

b. Calculer $P(2.$ℕ*$)$, puis généraliser à $P(m.$ℕ*$)$, avec : $m \in$ ℕ*.

12. Pour : c $\in$]0,1[, et : $A_c \in$ ℝ, on pose : $\forall$ k $\in$ ℕ, $P(\{k\}) = A_c.\dfrac{c^k}{k!}$.

a. Déterminer A_c pour que (ℕ, $\mathscr{P}$(ℕ), P) soit un espace probabilisé.

b. Calculer la probabilité de l'ensemble des naturels impairs.

Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales.

13. Lorsqu'on lance un dé équilibré à six faces, les événements suivants sont-ils indépendants ?
- obtenir un résultat pair.
- obtenir 3 ou 6.

14. Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé.
Soient A et B des événements tels que : $0 < P(A) < 1$.

a. Comparer : $P_{A\cup B}(A \cap B)$ et $P_A(A \cap B)$.

b. Montrer que : $P(B) = P_A(B).P(A) + P_{\overline{A}}(B).P(\overline{A})$.

15. Soient A et B deux événements d'un espace probabilité (Ω, $\mathscr{A}$, P).
On suppose que : $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, et : $P(A \cup B) = \dfrac{4}{9}$.
Calculer : $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, et : $P_B(A \cap \overline{B})$.

16. Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P), un espace probabilisé, et $A, B, A_1, ..., A_n$ des événements.

a. Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

b. Si $A_1, ..., A_n$, sont mutuellement indépendants, alors $\overline{A_1}, A_1, ..., A_n$ le sont aussi.

17. Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements de $\mathscr{A}$.
a. Si : $A \cap B = \emptyset$, à quelle condition A et B sont-ils indépendants ?
b. Montrer que A est indépendant de tout événement si et seulement si : $P(A) = 0$, ou : $P(A) = 1$.

18. On utilise dans un jeu de Pile ou Face une pièce truquée telle que : $P(Face) = p$, avec : $p \in$]0,1[, $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a. Quelle est la probabilité qu'au cours de n lancers, Face ne soit jamais suivi de Pile ?
b. Avec cette même pièce, deux joueurs A et B s'affrontent.
A commence et le gagnant est celui qui obtient le premier Face.
Quelle est la probabilité que A gagne ?

19. Une boîte contient 1 boule Blanche et 1 boule Rouge.
On tire une boule dans la boîte, on note sa couleur et on la remet dans la boîte accompagnée de deux boules de la même couleur.
On répète ensuite cette opération.
a. Pour : $n \in$ ℕ*, quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient Rouge ?
b. Quelle est la probabilité de l'événement « on tire infiniment des boules Rouges » ?
c. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois boules de la même couleur ?

20. Un enfant lance des galets pour faire des ricochets sur l'eau.
On suppose que les ricochets s'effectuent de manière indépendante et que la probabilité que le galet

ricoche (et donc ne coule pas) pour la $n^{\text{ième}}$ fois vaut $\frac{1}{n}$.

On note p_n la probabilité que le galet coule après n ricochets.

Calculer et interpréter $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

21. On lance une infinité de fois un dé parfait à **5** faces, numérotées de 1 à 5.
On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.
a. Calculer p_1.
b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
c. En déduire p_n, pour tout entier n.

22. Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu dont les règles sont les suivantes :
   - A et B s'affrontent en premier,
   - à chaque tour de jeu, le gagnant du duel affronte au tour suivant le joueur n'ayant pas participé au duel,
   - est déclaré vainqueur le joueur qui remporte deux parties consécutives.

   Lors de chaque duel, on suppose que les deux joueurs ont la même chance de gagner.
a. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête.
b. Qui a le plus de chance de gagner à ce jeu ?
On pourra noter S_n l'événement : « le jeu s'arrête à la $n^{\text{ième}}$ partie » et D_n l'événement : « le jeu dure au moins n parties ».

23. Deux archers A_1 et A_2 disputent un match et tirent alternativement sur une cibles jusqu'à ce qu'un des deux la touche.
A_1 tire le premier.
Pour tout : $i \in \{1,2\}$, A_i touche la cible avec une probabilité : $p_i \in]0,1[$.
On note : $q_i = 1 - p_i$, pour : i ∈ {1,2}, et on suppose que les tirs sont indépendants.
On pourra remarquer que A_i tire à des rangs de même parité que i.
Enfin, on note, pour : $i \in \{1,2\}$, l'événement G_i : « A_i l'emporte ».
a. Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2.n+1$ pour : n ∈ ℕ.
b. Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2.n$, pour : n ∈ ℕ.
c. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
d. On dit que le jeu est équitable lorsque : $P(G_1) = P(G_2)$.
   Montrer que ceci est réalisé si et seulement si : $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.
   Que peut-on en déduire si : $p_1 > \frac{1}{2}$?

Formule de Bayes.

24. On considère un test sanguin détectant un virus lorsqu'il est présent dans l'organisme testé avec une probabilité de 0.95.
Lorsque le virus n'est pas présent, le test donne néanmoins un résultat positif pour 1% des personnes.
Sachant que 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne soit effectivement infectée, sachant que le résultat du test a été positif ?
Quelle conclusion en tirer ?

25. Problème de Monty Hall.
Un présentateur de jeu télévisé (le premier à avoir présenté un jeu de ce type s'appelait Monty Hall aux Etats-Unis, de 1963 à 1977) propose à un candidat de choisir entre trois boîtes fermées, une seule contenant un trésor, les deux autres étant vides : le candidat gagnera ce qui se trouve dans la boîte choisie.
Après que le candidat a choisi une boîte, le présentateur (qui sait où se trouve le trésor) ouvre une des deux boîtes non choisies par le candidat et montre qu'elle est vide.

Il demande alors au candidat s'il veut modifier son choix et échanger la boîte choisie initialement pour l'autre boîte encore fermée.
Que doit faire le candidat et pourquoi ?

Niveau 2.
Dénombrement.

26. a. Donner une justification combinatoire (et non calculatoire) des égalités suivantes :
- $\forall$ n ≥ 1, $\forall$ $0 \le k \le n-1$, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, (ensembles à k éléments)
- $\forall$ n ≥ 1, $\forall$ $1 \le k \le n$, $n.\binom{n-1}{k-1} = k.\binom{n}{k}$, (équipes à k joueurs avec capitaine)
- $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

b. En déduire la somme : $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}$.

Ensembles dénombrables.

27. a. Montrer que l'application φ de ℕ dans ℤ définie par : $\forall$ n ∈ ℕ, $\varphi(n) = (-1)^n.\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, définit une bijection de ℕ dans ℤ et préciser φ^{-1}.
b. Retrouver ainsi que ℤ est dénombrable.

28. Soient : A = $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, et : B = $\{y_j, j \in \mathbb{N}\}$, deux ensembles dénombrables.
Soit ψ l'application définie de A×B dans ℕ par : $\forall$ $(x_i, y_j) \in$ A×B, $\psi((x_i, y_j)) = \frac{(i+j).(i+j+1)}{2} + i$.
Montrer que ψ est une bijection (on pourra poser : $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0+1+\ldots+n$)
Que peut-on en déduire ?

29. Montrer qu'une partie infinie A de ℕ est dénombrable.

30. On suppose qu'il existe une bijection f de ℕ dans $\mathscr{P}$(ℕ).
a. On note : A = $\{n \in \mathbb{N}, n \notin f(n)\}$.
En considérant l'antécédent q de A, aboutir à une contradiction.
b. Que peut-on en déduire ?

31. Soit $(x_i, i \in I)$, une famille de complexes tous non nuls, tels qu'il existe : $M \in \mathbb{R}^+$, tel que :
$\forall$ $J \subset I$, J finie, $\sum_{i \in J} |x_i| \le M$.
Montrer que I est au plus dénombrable.

32. On rappelle qu'on appelle développement décimal illimité propre d'un réel x entre 0 et 1 une écriture :
$x = 0.a_1\ldots a_n\ldots$, où : $\forall$ 1 ≤ n, $a_n \in \{0,\ldots,9\}$, la suite (a_n) n'étant pas constante à 9 à partir d'un certain rang.
On rappelle par ailleurs qu'il existe, par le biais d'une telle écriture, une bijection entre les réels de l'intervalle [0,1[et l'ensemble des suites d'entiers de {0,…,9}, non constantes à 9 à partir d'un certain rang.
On suppose qu'il existe une bijection f de ℕ dans [0,1[et on note $(a_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ le développement décimal illimité propre du réel $f(p)$, pour tout : $p \in \mathbb{N}$.
a. Soit (x_n) la suite construite par : $\forall$ n ∈ ℕ,
- si : $a_{n,n} \le 7$, $x_n = a_{n,n} + 1$,
- si : $a_{n,n} \ge 8$, $x_n = 0$.

Montrer que (x_n) correspond au développement décimal illimité propre d'un réel : $x \in$ [0,1[.

b. Montrer que x n'a pas d'antécédent par f.
c. Conclure que [0,1[n'est pas dénombrable, puis que ℝ n'est pas dénombrable.

Tribus.

33. L'ensemble : $\mathscr{B} = \{\{n,...,p\}$, avec : $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \leq p\}$, forme-t-il une tribu sur ℕ ?

34. On considère l'application Φ de ℕ dans lui-même définie par : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\Phi(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

On pose : $\mathscr{C} = \{\Phi^{-1}(B),\ B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$.
Montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu sur ℕ strictement incluse dans $\mathscr{P}$(ℕ).

35. On suppose qu'il existe une tribu $\mathscr{A}$ sur : Ω = [0,1], contenant les segments $[a,b]$, avec : $0 \leq a < b \leq 1$.

a. Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les intervalles ouverts $]a,b[$, avec : $0 \leq a < b \leq 1$, et tous les singletons $\{\alpha\}$, avec : $\alpha \in [0,1]$.

b. On suppose que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé tel que : $\forall\ 0 \leq a < b \leq 1$, $P([a,b]) = b - a$.
Déterminer P($]a,b[$), pour : $0 \leq a < b \leq 1$, puis P($\{\alpha\}$), pour : $\alpha \in [0,1]$.

Probabilité sur un ensemble fini.

36. Soit un ensemble Ω à trois éléments : $\Omega = \{a,b,c\}$, et soit : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x et y puis représenter les couples (x,y) trouvés, de telle sorte qu'il existe une probabilité sur Ω telle que : $P(\{a,b\}) = x$, et : $P(\{b,c\}) = y$.

37. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$.
On place dans un sac n jetons numérotés de 1 à n et on les tire du sac un par un (on suppose les tirages équiprobables).
On obtient ainsi tous les nombres entiers, de 1 à n, rangés dans un certain ordre.
On dira qu'il y a « coïncidence » au rang i lorsque le $i^{\text{ème}}$ jeton tiré porte le numéro i.
Enfin, on note λ_n le nombre de tirages (ou d'ordres) ne comportant aucune coïncidence pour n jetons.

a. Calculer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

b. On se place dans le cas : $n = 4$.
Montrer que le nombre d'ordres comportant une seule coïncidence est $4.\lambda_3$.
Quel est le nombre d'ordres comportant deux coïncidences exactement ?
Calculer λ_4.

c. Montrer que le nombre d'ordres comportant exactement i coïncidences (pour n jetons) est $\binom{n}{i}.\lambda_{n-i}$, en prenant la convention : $\lambda_0 = 1$.
En déduire la probabilité d'obtenir un ordre comportant exactement i coïncidences en fonction de λ_{n-i}.

38. Deux joueurs s'affrontent au cours de parties indépendantes.
Le joueur A dispose d'une fortune égale à n euros tandis que le joueur B dispose lui de $N - n$ euros, où : $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, avec : $n \leq N$.
A chaque tour de jeu, le joueur A a la probabilité p de l'emporter et B la probabilité : $q = 1 - p$ ($p \in]0,1[$).
En cas de défaite, le joueur qui a perdu cède un euro à son adversaire et le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
On note a_n la probabilité que le joueur A finisse ruiné lorsque sa fortune initiale vaut n.

a. Que valent a_0 et a_N ?

b. Etablir la relation de récurrence : $\forall\ 1 \leq n \leq N-1$, $a_n = p.a_{n+1} + q.a_{n-1}$.

c. En déduire que la suite (u_n) définie par : $\forall\ 1 \leq n \leq N$, $u_n = a_n - a_{n-1}$, est géométrique.

d. En déduire l'expression de a_n pour tout entier n (on distinguera les cas : $p = q$, et : $p \neq q$).

e. On suppose que B est infiniment riche alors que A continue à n'avoir que n euros au départ.

A quelle condition A a-t-il une chance de ne pas finir ruiné ?
Quelle est alors la probabilité pour que ce cas survienne ?

39. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, un espace probabilisé.
   a. Si A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0.9$, et : $P(B) = 0.8$, montrer que : $P(A \cap B) \geq 0.7$.
   b. Montrer que : $\forall\ (A, B) \in \mathscr{A}^2,\ P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
   c. Généraliser : $\forall\ (A_1, ..., A_n) \in \mathscr{A}^n,\ P(A_1 \cap ... \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$.

Probabilité sur un ensemble quelconque.

40. Soit (a_n) une suite de réels strictement décroissante et de limite nulle.
   Déterminer λ pour qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$, de telle sorte que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $P(\{n, n+1, ...\}) = \lambda . a_n$.

41. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.
   Montrer que la suite $(P(\{n\}))$ tend vers 0.

42. On effectue une suite infinie de lancers d'un dé équilibré à 6 faces.
   Pour : $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement : « obtention d'un 1 au i ième lancer ».
   a. Définir d'une phrase sans vocabulaire mathématique les événements :
      - $E_1 = \bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i$,
      - $E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i\right)$,
      - $E_3 = \bigcup_{i>3} A_i$.
   b. Ecrire à l'aide des A_i l'événement : « on obtient au moins une fois 1 au-delà du n ième lancer ».
   c. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ C_n = \bigcup_{i>n} A_i$.
      Montrer que la suite (C_n) est décroissante et décrire d'une phrase en français l'événement : $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.
   d. Ecrire à l'aide des A_i les événements :
      - B_n : « on n'obtient plus que des 1 à partir du n ième lancer »,
      - B : « on n'obtient plus que des 1 à partir d'un certain lancer ».

43. On dispose de deux pièces A et B donnant Pile avec les probabilités respectives a et b ($(a, b) \in]0,1[^2$).
   On choisit au hasard une des deux pièces puis on effectue une succession de lancers de la façon suivante :
   - on lance la pièce,
   - si l'on obtient Pile, on garde la même pièce pour le lancer suivant,
   - si l'on obtient Face, on chance de pièce pour le lancer suivant.

   On note :
   E_n l'événement « on utilise A pour la première fois lors du n ième lancer » et :
   V_n l'événement « on n'a obtenu que des Pile lors des n premiers lancers ».
   a. Pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(E_n)$ et $P(V_n)$.
   b. Que représentent les événements $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$?
      Calculer leur probabilité.

Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales.

44. Une famille habite une maison et comporte deux enfants.
   a. Si l'un des enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
   b. Si l'aîné est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
   c. Lorsqu'on sonne à la porte, celui des deux enfants qui vient ouvrir est toujours désigné au hasard par les parents.
      Si un garçon vient ouvrir, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

   Remarque : pour chaque question, on prendra soin de décrire l'univers utilisé, ainsi que la probabilité attachée à l' (ou les) expérience(s) aléatoire(s).

45. On distribue à un joueur de poker une main (un ensemble de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes).
a. Quelle est la probabilité que cette main contienne exactement deux As ?
b. Sachant que le joueur a reçu au moins un As quelle est la probabilité qu'il en ait reçu exactement deux ?

46. Une boîte contient 8 boules blanches et 2 boules noires et on tire trois boules de cette boîte, sans remise.
a. Quelle est la probabilité qu'au moins une des boules soit noire ?
b. Sachant qu'une des boules tirées est noire, quelle est la probabilité que la 1ère boule tirée soit noire ?
c. Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit noire ?

47. On considère une suite de relais qui transmettent un message binaire (0 ou 1).
Chaque relais est noté R_k et la probabilité pour que le relais R_k transmette correctement le message au suivant vaut : $0 < p < 1$, et la probabilité qu'il le transforme en son opposé est $1 - p$.
On note p_n la probabilité pour que le message arrivé au relais R_n soit identique au message arrivé en R_1.
a. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
b. En déduire la valeur de p_n pour tout entier : $n \geq 1$.
c. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Peut-on comprendre ce résultat ?

48. Paul le Poulpe.
Lors du championnat du monde de football 2010, Paul le Poulpe avait le choix dans son bocal avant chaque match de l'Allemagne entre deux récipients contenant sa nourriture préférée, chacun représentant l'un des deux adversaires du match (dont obligatoirement l'Allemagne) et Paul choisissait **toujours** l'un des deux récipients, censé désigner le gagnant.
a. Lors d'un match de poule (avec match nul éventuel), quelle est la probabilité d'un pronostic exact ?
b. Même question pour un match à élimination directe (sans match nul possible).
c. Pour les 7 matches avant la finale (8ème, quart, demi et petite finale), Paul ne s'est jamais trompé.
Quelle était la probabilité pour que cela arrive ?

49. On lance indéfiniment une pièce de monnaie déséquilibrée, qui donne Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On note, pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « après le n ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux Pile consécutifs », et : $a_n = P(A_n)$.
On définit par ailleurs, pour : $n \in \mathbb{N}$, les événements :
- P_n : « on obtient Pile au n ième lancer »,
- F_n : « on obtient Face au n ième lancer ».

a. Calculer a_1, a_2, a_3.
b. En utilisant le système complet d'événements ($F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2$), montrer que :
$$\forall\, n \geq 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{3}.a_{n+1} + \frac{2}{9}.a_n.$$
c. En déduire une expression de a_n en fonction de n, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et interpréter ce résultat.

50. On étudie la descendance d'une fleur…
A l'instant 0, on dispose d'une fleur F_0 et cette fleur peut avoir, à l'instant 1, deux descendances avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, ou aucune avec la probabilité : $q = 1 - p$, et après cela, elle meurt.
Les descendances (éventuelles) de la première fleur peuvent avoir, à l'instant 2, elles-mêmes des descendances de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur F_0, puis meurent, et ainsi de suite…
Pour : $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'événement : « la lignée de la fleur F_0 est éteinte à l'instant n » et : $u_n = P(U_n)$.
a. Calculer u_0 et u_1.
b. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on notera L.

c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p.u_n^2 + 1 - p$.

d. Montrer alors que : $L = \min\left(1, \dfrac{q}{p}\right)$, et interpréter ce résultat.

51. Tournoi avec une infinité de joueurs.
Des joueurs en nombre illimité, notés $J_1, ..., J_n, ...$, s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face.
Ils jouent successivement et dans l'ordre des indices, et le jeu se finit dès que l'un des joueurs obtient Pile.
Pour tout : $n \in \mathbb{N}$, J_n obtient Pile avec la probabilité : $p_n \in]0,1[$, et on note : $q_n = 1 - p_n$.
On notera par convention : $q_0 = 1$.
Enfin, on définit pour tout entier n l'événement G_n : « le joueur J_n gagne ».
a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ P(G_n) = q_0 ... q_{n-1}.p_n = q_0...q_{n-1} - q_0...q_n$.
b. On définit la suite (Q_n) par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ Q_n = q_0...q_n$.
Montrer que la suite (Q_n) converge vers un réel qu'on notera a, avec : $0 \le a \le 1$.
c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} P(G_k) = 1 - Q_n$, et en déduire que :
- si : $a \neq 0$, le jeu a une probabilité non nulle de ne pas se terminer,
- si : $a = 0$, le jeu se termine avec la probabilité 1.

d. Quelle est la probabilité que le jeu se termine dans les deux cas suivants :
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = p$, avec : $0 < p < 1$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Formule de Bayes.

52. On lance une seule fois une pièce équilibrée puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, de la façon suivante :
- on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne,
- on rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu Pile et une boule noire si on a obtenue Face.
- on recommence pour un tirage suivant.

Avant le k ième tirage, l'urne contient donc $k+1$ boules.
a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k ième tirage.
b. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k ième tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu Pile.
c. Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.

<u>Niveau 3.</u>
Tribus.

53. Soit Ω un ensemble.
a. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.
b. Soit $\mathscr{B}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$, et $(\mathscr{A}_i)$ la famille de toutes les tribus sur Ω contenant les éléments de $\mathscr{B}$.
Montrer que l'intersection de toutes ces tribus est encore une tribu sur Ω, contenant tous les éléments de $\mathscr{B}$, puis que c'est la plus petite tribu sur Ω (au sens de l'inclusion) contenant les éléments de $\mathscr{B}$.

54. Soit (A_n) une suite d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
On pose : $A = \bigcup_{n \ge 0}\left(\bigcap_{p \ge n} A_p\right)$, et : $A' = \bigcap_{n \ge 0}\left(\bigcup_{p \ge n} A_p\right)$.
a. Vérifier que A est un événement et préciser à quelle condition A est-il réalisé ?
b. Même question pour A'.

Probabilité sur un ensemble quelconque.

55. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et soit (A_n) une suite d'événements de Ω deux à deux incompatibles.
Montrer que la suite $(P(A_n))$ tend vers 0.

56. On munit ℕ* de la probabilité : $\forall\ n \in$ ℕ*, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

Pour : $k \in$ ℕ*, on note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

a. Donner la probabilité de A_k, pour : $k \in$ ℕ*.

b. Donner la probabilité de l'événement $A_2 \cup A_3$.

c. Soit B l'événement : « n est un nombre premier » (1 n'étant pas premier).

Montrer que : $\dfrac{13}{32} < P(B) < \dfrac{209}{504}$, et en déduire une valeur de $P(B)$ à 10^{-2} près.

Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales.

57. On considère $N+1$ boîtes numérotées de 0 à N, telles que la boîte numéro p contient k boules Blanches et $N-k$ boules Noires.
On choisit (de façon équiprobable) une boîte, puis on tire des boules de cette boîte, avec remise.
a. Quelle est la probabilité que la $(n+1)^{\text{ième}}$ boule tirée soit Blanche, sachant que les n premières tirées sont également Blanches ?
b. Que devient ce résultat lorsque N tend vers $+\infty$?

58. Une boîte contient p boules Blanches et q boules Noires indiscernables au toucher.
On procède à l'expérience suivante :
on tire une boule de la boîte, on note sa couleur, puis on la replace avec d boules de la même couleur en plus de celle replacée.
Si on répète n fois cette expérience, quelle est la probabilité qu'au tirage n, la boule tirée soit Blanche ?

59. Pour : $n \geq 2$, on munit : $\mathbb{N}_n = \{1,2,...,n\}$, de la probabilité uniforme.

Pour un entier p divisant n, on note : $A_p = \{1 \leq k \leq n,\ p$ divise $p\}$.

a. Calculer $P(A_p)$.

b. Si p et q des diviseurs de n premiers entre eux, montrer que A_p et A_q sont indépendants.

Plus généralement, si $p_1,..., p_r$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors les événements A_{p_1}, …, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.

c. Si on note : $B = \{1 \leq k \leq n,\ k$ et n premiers entre eux$\}$, montrer que : $P(B) = \displaystyle\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

60. Deux joueurs Pierre et Bernard lancent à tour de rôle un dé équilibré à 6 faces, Pierre commençant.
Est déclaré vainqueur le premier qui obtient un 6.
On note les événements A : « Pierre gagne la partie », B : « Bernard gagne la partie », et :
$\forall\ n \in$ ℕ*, S_n : « le 6 sort au $n^{\text{ième}}$ lancer », et F_n : « la partie se termine au $n^{\text{ième}}$ lancer ».
a. Quel est l'univers lié à cette expérience aléatoire ?
b. Exprimer A et B en fonction des S_n et F_n.
c. Calculer la probabilité de F_n, pour : $n \in$ ℕ.
d. En déduire la probabilité de A et de B et dire si le jeu est équilibré.
e. En notant D l'événement : « il n'y a pas de vainqueur », calculer $P(D)$ et dire si D est impossible.

61. « Pile-Pile-Face » ou « Face-Pile-Pile » ?
On considère une suite infinie de lancer d'une pièce équilibrée.
Jean et Paul s'affront dans un jeu dont les règles sont :
• Jean gagne si la configuration « Pile-Pile-Face » apparaît sans que « Face-Pile-Pile » ne soit apparue,
• Paul gagne si la configuration « Face-Pile-Pile » apparaît sans que « Pile-Pile-Face » ne soit apparue,
• si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.
a. Pour : $n \geq 3$, on note G_n l'événement : « Jean gagne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer », $g_n = P(G_n)$.

Calculer g_3 et g_4, et montrer que : $\forall\ n \geq 3,\ g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la probabilité que Jean soit déclaré gagnant.

b. Pour tout : n ≥ 1, on note d_n la probabilité que lors des n premiers lancers, n'apparaissent jamais deux Pile consécutifs.

Calculer d_1 et d_2.

Montrer, en considérant les résultats des premier et second lancers que : ∀ n ≥ 1, $d_{n+2} = \frac{1}{2}.d_{n+1} + \frac{1}{4}.d_n$.

En déduire que la suite (d_n) tend vers 0.

c. Pour : $n \geq 2$, soit l'événement B_n : « aucun joueur n'est déclaré gagnant à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Montrer que : $\forall\ n \geq 2,\ P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$.

Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.
En déduire la probabilité que Paul soit déclaré gagnant et conclure si le jeu est équilibré ou pas.

62. Un système peut être placé en n positions différentes notées $S_1,\dots,S_n$.

A tout moment, il occupe une et une seule position, mais chaque minute, sa position est modifiée de façon aléatoire, de telle sorte que si on note à chaque minute X l'ancienne position et Y la nouvelle, on a :
$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\ P_{(X=S_i)}(Y = S_j) = p_{i,j}$.

On suppose de plus que : $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ P(X = S_i) \neq 0$, et on note M la matrice : $M = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que : $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$ (on dit que la matrice et le processus sont stochastiques).

b. Soient : $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\ u_i = P(X = S_i),\ v_j = P(Y = S_j),\ U = (u_1,\dots,u_n)$, et : $V = (v_1,\dots,v_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que : $V = U.M$.

c. En déduire une méthode simple pour calculer la probabilité que le système soit dans une position donnée au bout de p modifications.

d. Montrer que 1 est valeur propre de M.

63. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Démontrer que : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$.

b. On suppose que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(A_n) \neq 1$.

Démontrer que : $\left(P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))\ \text{diverge}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} P(A_n)\ \text{diverge}\right)$.

64. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A_1,\dots,A_n$ des événements mutuellement indépendants.

Montrer que la probabilité p_0 qu'aucun des A_i ne soit réalisé vérifie : $p_0 \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.

65. Loi du 0-1 de Kolmogorov.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants.

a. Interpréter l'événement : $A = \bigcap_{n\geq 0}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)$.

b. Si la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge, montrer que : $P(A) = 0$.

c. Si la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge, montrer que : $P(A) = 1$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).