Espaces probabilisés (corrigé niveau 3).

Tribus.

53. a. • Puisque toute tribu contient Ω, une telle intersection contient aussi Ω.

• Si A appartient à l'intersection, alors A appartient à toute tribu constituant cette intersection, donc $\overline{A}$ est dans toutes les tribus, et donc aussi dans leur intersection.

• Si (A_n) est une famille d'éléments appartenant à l'intersection des tribus, tous les A_n sont dans toutes les tribus et la réunion $\bigcup_{n \notin N} A_n$ aussi, donc également dans l'intersection des tribus.

Finalement, cette intersection de tribus est encore une tribu sur Ω.

b. Cette famille ($\mathscr{A}_i$) contient au moins $\mathscr{P}$(Ω) donc la famille envisagée contient au moins une tribu.
En application de la question a, c'est encore une tribu sur Ω.
Si toutes les tribus $\mathscr{A}_i$ contiennent tous les éléments de $\mathscr{B}$ (qui sont des parties de Ω), alors l'intersection $\mathscr{A}$ des $\mathscr{A}_i$ a encore cette propriété.
Considérons alors une dernière tribu $\mathscr{A}$' sur Ω qui contient les éléments de $\mathscr{B}$.
$\mathscr{A}$' fait alors partie des tribus de la famille précédente et donc contient l'intersection $\mathscr{A}$, soit : $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$'.
$\mathscr{A}$ est donc bien la plus petite tribu sur Ω qui contient les éléments de $\mathscr{B}$.

54. a. Si les A_n sont des événements, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left(\bigcap_{p \geq n} A_p\right)$ est encore un événement (comme intersection dénombrable), puis A aussi comme réunion dénombrable d'événements.

A est réalisé si l'un des événements $\left(\bigcap_{p \geq n} A_p\right)$ est réalisé, pour : $n \in \mathbb{N}$, autrement dit si et seulement si il existe un entier n tel que les A_p sont réalisés pour : $n \leq p$.

Reformulé à nouveau, A est réalisé si et seulement si tous les événements A_p sont réalisés, à partir d'un certain rang.

b. La démonstration s'adapte évidemment pour A' qui est ainsi un événement.

De plus A' est réalisé si et seulement si $\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)$ est réalisé pour tout : $n \in \mathbb{N}$, autrement dit s'il existe une infinité d'événements A_p qui sont réalisés.

Probabilité sur un ensemble quelconque.

55. Si on considère la suite croissante d'événements définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, alors la suite $(P(B_n))$ est convergente.

Or le fait que (A_n) soit une suite d'événements deux à deux incompatibles permet d'écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k),$$

et puisque cette suite converge, c'est que la série correspondante est convergente et que son terme général tend vers 0.

56. a. L'événement A_k est : $A_k = \{k.p,\ p \in \mathbb{N}^*\}$, donc : $P(A_k) = \sum_{p=1}^{+\infty} P(\{k.p\}) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k.p}} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k - 1}$.

On peut remarquer que : $P(A_1) = P(\mathbb{N}^*) = 1$.

b. Classiquement : $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^3 - 1} - \frac{1}{2^6 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}$,

puisque 2 et 3 étant premiers entre eux, on a : $P(A_2 \cap A_3) = P(A_6)$.

c. B est donc l'ensemble des nombres premiers.

Alors : $(A_2 \cup A_3 \setminus \{2,3\}) \cup \{1\} \subset \overline{B}$, et cette inclusion est stricte.

Comme P est à valeurs strictement positives, on en déduit que : $P((A_2 \cup A_3 \setminus \{2,3\}) \cup \{1\}) < P(\overline{B})$.

Donc, comme réunion disjointe, on peut en déduire que : $\frac{29}{63} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} < 1 - P(B)$, d'où :

$$P(B) < 1 - \frac{29}{63} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{504 - 232 + 126 + 63 - 252}{504} = \frac{209}{504}.$$

De même : $\{2,3,5\} \subset B$, donc : $P(\{2,3,5\}) < P(B)$, soit : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{8+4+1}{32} = \frac{13}{32} < P(B)$.

Puisque, enfin : $\frac{209}{504} \approx 0.4147$, et : $\frac{13}{32} \approx 0.406$, on en déduit que : $P(B) = 0.41$, à 10^{-2} près.

57. a. On utilise la formule des probabilités totales.

Notons A_i l'événement : « la i ième boule tirée est blanche » et B_k : « on choisit la boîte k ».

Lorsque l'on a choisi une boîte (la boîte k), la probabilité de tirer toujours des boules blanches pendant n tirages vaut : $P_{B_k}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$, et la probabilité totale de ne tirer que des boules blanches pendant n tirages est donc de :

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=0}^{N} P_{B_k}(A_1 \cap \ldots \cap A_n).P(B_k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}.\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N+1}.\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Puis la probabilité cherchée vaut :

$$P_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1}) = \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)} = \frac{\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{1}{N}.\frac{\sum_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} k^{n}}.$$

b. Quand N tend vers $+\infty$, la quantité $\frac{1}{N+1}.\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$ comme somme de Riemann tend vers l'intégrale :

$\int_0^1 t^n.dt = \frac{1}{n+1}$, et donc la probabilité précédente tend vers $\frac{n+1}{n+2}$.

58. Evaluons la probabilité cherchée pour : $n = 1$ (soit au premier tirage).

Elle vaut : $p_1 = \frac{p}{p+q}$ (loi uniforme, nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles).

Au deuxième tirage, on a, avec les deux possibilités (Blanche ou Noire au premier tirage) et la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \frac{p}{p+q}.\frac{p+d}{p+q+d} + \frac{q}{p+q}.\frac{p}{p+q+d} = \frac{p}{p+q}.$$

Montrons alors par récurrence que la probabilité d'obtenir une boule blanche au n ième tirage est encore égale à : $p_n = \frac{p}{p+q}$.

Ce résultat étant vrai pour : $n = 1$ (et 2), supposons le vrai jusqu'à un rang : $n \geq 1$, donné.

Puisque chaque tirage est indépendant et que le fait de tirer une boule Blanche est supposé suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{p}{p+q}$, le nombre k de boules blanches tirées lors des n premiers tirages suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{p}{p+q})$.

Or si k boules blanches ont été tirées lors des n premiers tirages, alors la probabilité d'obtenir une boule

Blanche à nouveau au tirage numéro $n+1$ est de : $\dfrac{p+k.d}{p+q+n.d}$.

Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage est donc de :

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^k \cdot \left(1-\frac{p}{p+q}\right)^{n-k} \cdot \frac{p+k.d}{p+q+n.d} = \frac{1}{(p+q)^n} \cdot \frac{1}{p+q+n.d} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k} . (p+k.d).$$

On coupe alors la somme en deux sommes et dans la deuxième, on utiliser l'égalité : $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$.

On en déduit que : $p_{n+1} = \dfrac{1}{(p+q)^n} \cdot \dfrac{1}{p+q+n.d} . [p.(p+q)^n + d.n.\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} . p^k . q^{n-k}]$.

La dernière somme se réécrit en : $d.n.p.\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} . p^{k-1} . q^{(n-1)-(k-1)} = d.n.p.(p+q)^{n-1}$.

Finalement : $p_{n+1} = \dfrac{1}{(p+q)^n} \cdot \dfrac{1}{p+q+n.d} . [p.(p+q)^n + d.n.p.(p+q)^{n-1}] = \dfrac{p}{p+q}$,

ce qui termine la récurrence.

59. a. C'est un problème de dénombrement, consistant à trouver le nombre de multiples de p inférieurs à n.

Or comme p divise n, le nombre de multiples de p inférieurs à n est donc $\dfrac{n}{p}$, et la probabilité cherchée vaut : $P(A_p) = \dfrac{n}{p} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$.

b. Cela revient à montrer que : $P(A_p \cap A_q) = P(A_p).P(A_q)$.

Soit alors : $k \in A_p \cap A_q$.

On sait que p et q divisent k donc étant premiers entre eux, le produit $p.q$ divise k (et divise n).

Donc : $k \in A_{p.q}$.

Réciproquement, il est immédiat que : $(k \in A_{p.q}) \Rightarrow (k \in A_p \cap A_q)$.

Donc : $P(A_p \cap A_q) = P(A_{p.q}) = \dfrac{1}{p.q} = P(A_p).P(A_q)$.

Ce qu'on vient de démontrer pour deux entiers premiers entre eux se généralise à toute famille finie d'entiers premiers entre eux deux à deux, ce qui permet de conclure à l'indépendance mutuelle des événements proposés.

Plus généralement, si $p_1,\ldots,p_r$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors les événements A_{p_1}, …, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.

c. Soient $p_1,\ldots,p_k$ les diviseurs premiers de n.

Alors un nombre entier m et n sont premiers entre eux si et seulement si m est premier avec tous les entiers $p_1,\ldots,p_k$.

Et puisque les p_i sont des nombres premiers, m est premier avec p_i si et seulement si p_i ne divise pas m.

Finalement : $B = \overline{A_{p_1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{p_k}}$.

Enfin, les événements A_{p_1}, …, A_{p_r} étant mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi donc : $P(B) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_{p_1}}) = \prod_{i=1}^{k} [1 - P(A_{p_1})] = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$.

60. a. L'univers à considérer n'est pas très simple.

On peut néanmoins envisager que les deux joueurs jouent une infinité de fois, le problème du gain ne se posant alors qu'a posteriori.

On peut donc choisir : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}^*}$.

b. En traduisant mathématiquement les conditions proposées, on aboutit à :

- $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_{2.k+1} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_{2.k}} \cap S_{2.k+1})$, et :
- $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2.k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_{2.k-1}} \cap S_{2.k})$.

c. F_n est équivalent à dire que les joueurs n'ont sorti aucun 6 jusqu'au lancer numéro n où apparaît un 6.

Donc par indépendance : $P(F_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{6}\right)$.

d. Puisque les événements (F_k) sont clairement incompatibles deux à deux, on a :

- $P(A) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_{2.k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(F_{2.k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2.k+1-1} . \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} . \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2.k} = \frac{1}{6} . \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$, et :
- $P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2.k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_{2.k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2.k-1} . \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} . \frac{5}{6} . \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2.k} = \frac{5}{36} . \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{11}$.

Le jeu n'est donc pas équilibré puisque la probabilité de gain de Pierre est supérieure à celle de Bernard, ce qui n'est pas étonnant puisque Pierre commence.

e. L'événement D est : $D = \overline{A \cup B}$, et donc :
$P(D) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B))$, puisque A et B sont incompatibles.

Donc : $P(D) = 1 - \frac{6}{11} - \frac{5}{11} = 0$.

Finalement D est presque impossible, mais n'est pas l'événement impossible puisque : $D \neq \varnothing$.
En effet, D est l'ensemble des suites formées uniquement à partir de {1,2,3,4,5}.

61. a. On va noter P_k l'événement : « Pile sort au k ième lancer ».

G3 se produit si la séquence « Pile-Pile-Face » sort lors des 3 premiers lancers, soit : $g_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Pour que Jean soit déclaré gagnant au 4ième lancer, il faut que Pile-Pile-Face sortent respectivement aux 2ièm, 3ième et 4ième lancers.
Or si Pile sort au premier lancer, alors Paul gagne au 3ième lancer (apparition de la séquence Face-Pile-Pile).

Donc : $G_4 = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P_4}$, et : $g_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Si maintenant on considère : $n \geq 4$, alors pour que Jean gagne au n ième lancer, il faut avoir obtenu Face au n ième lancer, et Pile aux $(n-2)$ ième et $(n-1)$ ième lancers.
Dans ce cas, il ne peut y avoir eu un Face au $(n-3)$ ième lancer sinon Paul aurait gagné (séquence Face-Pile-Pile obtenue au lancer numéro $(n-1)$), et par récurrence immédiate, tous les lancers précédents ont de même dû donner un Pile.

Donc : $G_n = P_1 \cap ... \cap P_{n-1} \cap \overline{P_n}$, et : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque de plus, les événements (G_n, $n \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux incompatibles, la probabilité pour que Jean gagne vaut donc : $P(G) = P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^3} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ (car : $g_1 = g_2 = 0$).

b. Commençons par appeler D_n l'événement proposé.

Le premier événement D_1 se produit toujours (en un seul lancer, il ne peut y avoir deux Pile

consécutifs) et donc : $d_1 = 1$.
Pour D_2, il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire (à savoir qu'il y a deux Pile consécutifs lors des deux premiers lancers) et : $d_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Considérons ensuite le système complet d'événements ($\overline{P_1}, P_1 \cap P_2, P_1 \cap \overline{P_2}$).
Puisque les tirages sont indépendants, toute séquence obtenue durant les lancers $1,...,n+1$ est équivalente à la même séquence obtenue durant les lancers $2,...,n+2$.
Si alors on obtient Face au 1$^{\text{ier}}$ lancer, ne pas obtenir deux Pile consécutifs lors des lancers $2,...,n+2$ a la même probabilité que ne pas obtenir deux Pile consécutifs les des lancers $1,...,n+1$.
De même, si on obtient Pile-Face, lors des deux premiers lancers, ne pas obtenir deux Pile consécutifs lors des lancers $3,...,n+2$ a la même probabilité que ne pas obtenir deux Pile consécutifs lors des lancers $1,...,n$.
La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(D_{n+2}) = P_{\overline{P_1}}(D_{n+2}).P(\overline{P_1}) + P_{P_1 \cap \overline{P_2}}(D_{n+2}).P(P_1 \cap \overline{P_2}) + P_{P_1 \cap P_2}(D_{n+2}).P(P_1 \cap P_2).$$

Or dans le troisième cas, $P_{P_1 \cap P_2}(D_{n+2}) = 0$, puisque les deux premiers lancers ont donné Pile.

Finalement : $d_{n+2} = P(D_{n+2}) = d_{n+1}.\frac{1}{2} + d_n.\frac{1}{4} + 0.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.d_{n+1} + \frac{1}{4}.d_n$.

La suite (d_n) est alors récurrente linéaire à deux termes et les racines de l'équation caractéristique associée sont $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, qui sont toutes deux en valeur absolue strictement inférieures à 1.

Comme (d_n) est combinaison linéaire des suites géométriques dont la raison vaut précisément ces valeurs, on en déduit que chacune tend vers 0, tout comme (d_n).

c. Etudions dans quel cas aucun joueur ne gagne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer.
Cela se produit s'il n'y a que des Pile sans aucun Face lors de ces lancers.
Et si ce n'est pas le cas (événement contraire), alors c'est qu'un Face est apparu ; mais dans ce cas, il n'y a pas eu deux Pile de suite, sinon l'un ou l'autre des joueurs a gagné durant les n premiers lancers.
Comme ces deux possibilités sont incompatibles et décrivent tous les cas où aucun joueur n'a gagné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, on en déduit que : $\forall\ n \geq 2$, $P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$.

Aucun joueur ne gagne la partie est l'événement : $A = \bigcap_{n=2}^{+\infty} B_n$, et comme la suite ($B_n$) est décroissante, on peut écrire : $P(A) = P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2^n} + d_n\right) = 0$.

Autrement dit, l'un des joueurs gagne presque sûrement.
Puisque « Jean gagne » et « Paul gagne » sont incompatibles, on a : $P(\overline{A}) = P(J \cup P) = P(J) + P(P)$,

et finalement Paul gagne la partie avec une probabilité de : $P(P) = P(\overline{A}) - P(J) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Conclusion : Paul a trois fois plus de chances de remporter ce jeu, qui n'est donc pas équilibré.

62. a. Puisque Y peut prendre n valeurs, la famille ($Y = S_j$) constitue un système complet d'événements et :

$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ P(X = S_i) = \sum_{j=1}^{n} P((X = S_i) \cap (Y = S_j)) = \sum_{j=1}^{n} P_{(X=S_i)}(Y = S_j).P(X = S_i).$$

Donc si on simplifie par $P(X = S_i)$, on obtient l'égalité voulue.

b. De même, les événements ($X = S_i)_{1 \leq i \leq n}$, forment un système complet d'événements donc :

$$\forall\ 1 \leq j \leq n,\ v_j = P(Y = S_j) = \sum_{i=1}^{n} P((X = S_i) \cap (Y = S_j)) = \sum_{j=1}^{n} P_{(X=S_i)}(Y = S_j).P(X = S_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.u_i,$$

ce qui correspond bien au produit matriciel : $V = U.M$.

c. Si on note T_p la matrice donnant les probabilités des différents états du système au bout de p modifications, alors : $T_p = U.M^p$.

d. Enfin, puisque la somme des coefficients de M par ligne vaut 1, on en déduit que si on appelle X le vecteur colonne (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) ne comportant que des 1, alors : $M.X = X = 1.X$, et 1 est bien valeur propre de M (associée par exemple au vecteur propre X).

63. a. On commence par écrire : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

Si on note : $\forall\ N \in \mathbb{N},\ B_N = \bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}$, on a : $B_{N+1} \subset B_N$, et : $B_N = \bigcap_{n=0}^{N} B_n = \bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}$, et par continuité décroissante, la suite $(P(B_n))$ converge et : $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$, et comme : $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$, qu'on peut au besoin démontrer par double inclusion, on aboutit à : $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$

Puis les événements A_n étant mutuellement indépendants, les événements $\overline{A_n}$ le sont aussi, et :

$\forall\ N \in \mathbb{N},\ P(B_N) = P\left(\bigcap_{n=0}^{N} B_n\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=0}^{N} P(\overline{A_n})$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$, et : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$.

b. Avec l'hypothèse faite, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(\overline{A_n}) \neq 0$, et on peut considérer :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(P(\overline{A_k})) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 - P(A_k))$.

On a alors : $\left(P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k}) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(P(\overline{A_k})) = -\infty\right)$.

Or la série $\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))$ est à termes réels négatifs, donc :

$\left(\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))\right.$ diverge$) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(P(\overline{A_k})) = -\infty\right)$, et on a bien équivalence avec : $\left(P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right)$.

Pour la dernière équivalence, distinguons deux cas :

- la suite $(\ln(P(\overline{A_n})))$ tend vers 0, soit $(P(\overline{A_n}))$ tend vers 1 ou encore $(P(A_n))$ tend vers 0.

Dans ce cas : $\ln(P(\overline{A_k})) = \ln(1 - P(A_k)) \underset{+\infty}{\sim} -P(A_k)$,

et par comparaison de séries à termes négatifs :

$\left(\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))\right.$ diverge$) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} -P(A_n)\right.$ diverge$) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} P(A_n)\right.$ diverge$)$.

- la suite $(\ln(P(\overline{A_n})))$ ne tend pas vers 0, soit $(P(A_n))$ ne tend pas vers 0, et dans ce cas on a la divergence simultanée des deux séries $\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))$ et $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$.

En conclusion, on a bien dans tous les cas : $\left(\sum_{n\geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))\right.$ diverge$) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} P(A_n)\right.$ diverge$)$,

ce qui achève la démonstration.

64. On cherche à évaluer : $P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)]$ (puisque les événements sont mutuellement indépendants).

Or : $\forall\ x \in [0,1],\ 0 \leq (1-x) \leq e^{-x}$.

En appliquant ce résultat aux $P(A_i)$ et en multipliant les inégalités, on en déduit que :

$$0 \leq p_0 = P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i)] \leq \prod_{i=1}^{n}\exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\right).$$

65. a. A correspond donc au fait que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{p\geq n} A_p$ est non vide, autrement dit que l'un des A_p est réalisé au-delà de n, et ceci pour tout n.

Il est équivalent de dire qu'une infinité de A_p est réalisé.

b. On peut commencer par écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ N \geq n,\ P(A_n \cup ... \cup A_N) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k),$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$, on déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

Par croissance d'une probabilité, on en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $A \subset \left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)$, donc : $0 \leq P(A) \leq P\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

Or comme reste d'une série convergente, la suite $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0, et donc : $P(A) = 0$, par passage à la limite et encadrement.

c. Dans l'exercice précédent, on avait vu que pour une famille finie (A_p) d'événements mutuellement indépendants, la probabilité p_0 qu'aucun événement de la famille ne soit réalisé vérifie :

$$p_0 \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right).$$

Donc pour la situation qui nous intéresse ici :

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ N \geq n,\ P(\overline{A_n} \cap ... \cap \overline{A_N}) = P(\overline{A_n \cup ... \cup A_N}) \leq \exp\left(-\sum_{i=n}^{N} P(A_i)\right)$, d'où :

$$1 - \exp\left(-\sum_{i=n}^{N} P(A_i)\right) \leq P(A_n \cup ... \cup A_N).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, la série (positive) divergeant, sa somme partielle tend vers $+\infty$ et :

$1 \leq P\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)$, d'où : $1 = P\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)$.

On constate ensuite que si : $P(F) = P(G) = 1$, alors :

$P(F \cap G) = P(F) + P(G) - P(F \cup G) \geq 1 + 1 - 1 = 1$, et donc :

$P(F \cap G) = 1$.

Par récurrence, on généralise ce résultat à une intersection finie d'événements de probabilité 1.

En considérant alors la suite décroissante $\left(\bigcap_{n=0}^{N}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)\right)_{N\geq 0}$ qui tend vers A, on en déduit que :

$\forall\ N \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcap_{n=0}^{N}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)\right) = 1$, et comme limite décroissante, on conclut que :

$$P(A) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)\right) = 1.$$