D.L. 4

Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) À l'aide d'une intégration par parties, donner un sens à l'intégrale impropre $F = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $\forall x \in \left]0, \pi\right[\quad \dfrac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \cos 2kx$.

En déduire : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

3) **a)** Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$; montrer à l'aide d'une intégration par parties que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f\left(x\right) \sin nx \mathrm{d}x$ converge vers 0.

b) Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$ et $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g\left(x\right) - g\left(0\right)}{x} & \text{si } x \in \left]0, \pi/2\right] \\ g'\left(0\right) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

En déduire que la suite de terme général $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g\left(x\right) \frac{\sin nx}{x} \mathrm{d}x$ converge vers $F.g\left(0\right)$.

4) Montrer que $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \pi/2\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$.

5) En déduire la valeur de F.

Problème B

1) Pour tout réel $x \in \left]-1, 1\right[$, on pose : $F\left(x\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2xt + 1}$.

Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer au moyen d'une primitive.

2) On pose alors, pour tous réels a, b tels que $a^2 - 4b < 0$: $G\left(a, b\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + at + b}$.

Donner pour $G\left(a, b\right)$ une expression très simple utilisant F.

3) Pour $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$, montrer que la fraction rationnelle :

$$\Phi\left(X\right) = \frac{X^2 + 1}{\left(X^2 + aX + b\right)\left(X^2 - aX + b\right)}$$

peut se décomposer sous la forme

$$\Phi\left(X\right) = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 + aX + b} + \frac{-\lambda X + \mu}{X^2 - aX + b}$$

où λ et μ sont deux réels que l'on précisera.

4) Factoriser le polynôme $P\left(X\right) = X^4 + X^2 + \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}\left[X\right]$.

5) Calculer enfin, en utilisant les résultats précédents, la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 + \sin^4 \varphi}$.

Problème C

On définit la fonction Γ d'Euler par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

Partie I – Une première identité due à Euler

1) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

2) Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On désigne par $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

et l'on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $\big(I_n(x)\big)_{n \geq 1}$ et $\big(J_n(x)\big)_{n \geq 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\forall x > 0 \quad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$

d) En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

e) Établir enfin l'identité d'Euler :

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Partie II – Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h(u) = u - \lfloor u \rfloor - 1/2$$

où la notation $\lfloor u \rfloor$ désigne la partie entière de u.

1) Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t) \mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, justifier pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} \mathrm{d}u.$$

4) L'application $u \mapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

5) Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} \mathrm{d}u.$$

En reprenant l'intégration par parties de la question **3)**, démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que, pour tout $x > 0$

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2} \mathrm{d}u.$$

Partie III

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u$$

où h est l'application définie à la partie **II**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n, on définit $F_n(x)$ par

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n! \cdot n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

1) Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t \mathrm{d}t = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} \mathrm{d}u$$

2) En déduire que

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} \mathrm{d}u$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1)\ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x.$$

3) **a)** En utilisant la formule de Stirling, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}.$$

b) En déduire que

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u.$$

c) Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} \mathrm{d}u.$$