Exercice

1) Comme $a_n \sim b_n$, les séries entières définissant f et g ont même rayon de convergence. Or f est définie sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, donc

$$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2) Comme (b_n) est à valeurs strictement positives, l'hypothèse $a_n \sim b_n$ se traduit par

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{d'où} \quad \gamma_n = \frac{a_n}{b_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Il existe } (\gamma_n) \text{ telle que : } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n\,(1+\gamma_n).}$$

3) **a)** La suite $(\gamma_n)_{n\geq m+1}$ converge vers 0, elle est donc bornée, donc

$$\boxed{\delta_m = \sup_{n\geq m+1} |\gamma_n| \text{ est bien défini.}}$$

b) Soient $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. J'ai

$$\frac{f(t)-g(t)}{g(t)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n b_n t^n}{g(t)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{m} \gamma_n b_n t^n}{g(t)} + \frac{\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n t^n}{g(t)}.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire et à la définition de γ_m, j'ai

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n t^n\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n|\, b_n t^n \leq \gamma_m \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n t^n.$$

Or, comme les b_n et t sont strictement positifs, j'ai

$$g(t) \geq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n t^n \quad \text{d'où} \quad \frac{\left|\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n t^n\right|}{g(t)} \leq \delta_m.$$

Par ailleurs,

$$g(t) \geq b_{m+1} t^{m+1} \quad \text{d'où} \quad \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{m} \gamma_n b_n t^n\right|}{g(t)} \leq \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n t^n.$$

Et en regroupant ces deux majorations, grâce à nouveau à l'inégalité triangulaire,

$$\boxed{\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leq \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n t^n.}$$

c) Dans cette démonstration "à la Cesàro", l'idée est que δ_m est aussi petit que je le souhaite, pour m assez grand **et pour tout** t, tandis que le second terme tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, **pour** m **fixé**...

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, je dispose de m dans $\mathbb{N}$ tel que $|\gamma_n| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq m$. J'ai alors $\delta_m \leq \varepsilon/2$ par définition de la borne supérieure (cela montre au passage que la suite (δ_m) converge vers 0). m étant ainsi **fixé**, j'ai

$$\sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n t^n \underset{t\to+\infty}{=} O(t^m) \ \text{(somme finie de termes tous } O(t^m)\text{)}$$

et donc

$$\frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \left(\text{c'est un } O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Je dispose donc de $A > 0$ tel que

$$\forall t \geq A \quad \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n t^n \leq \varepsilon/2.$$

Au bilan, grâce au **b)** :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall t \geq A \quad \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, par définition de la limite, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire que

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t).}$$

4) a) Classiquement $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$, donc $c_n \sim a_n$ où $a_n = \frac{e}{n!}$. Ici $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ (série exponentielle : $f(t) = e^{t+1}$) et les a_n et c_n sont strictement positifs, donc le résultat du **1)** s'applique.

$$\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

b) Et le résultat du **3)** s'applique aussi !

$$\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{t+1}.}$$

5) a) Soit $z : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Grâce au théorème de dérivation terme à terme des séries entières, j'ai moyennant quelques réindexations et en ajoutant des termes nuls pour $n = 0\ldots$

$$\forall t \in \left]-R, R\right[\quad z'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \ ; \quad tz'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n$$
$$tz''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} t^n$$

D'où (unicité des coefficients d'une série entière), z est solution de (E) sur $\left]-R, R\right[$ si et seulement si

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)^2 a_{n+1} - n a_n = 0.$$

Comme $a_0 = z(0)$ et $a_1 = z'(0)$, z est une solution de (E) sur $\left]-R, R\right[$ telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$ si et seulement si

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = \frac{n-1}{n^2} a_{n-1},$$

c'est-à-dire (récurrence facile) si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{n.n!}.$$

Soit donc la suite (a_n) définie ci-dessus. La fonction $z : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence infini comme pour la fonction exponentielle, car $\frac{1}{n.n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right)$) et c'est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$, d'après les équivalences précédentes.

$$\boxed{\text{L'unique solution recherchée est } z : t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n.n!}, \text{ définie sur } \mathbb{R}.}$$

b) Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières s'applique sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

et je reconnais :

$$\boxed{z'(t) = \frac{e^t - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0 \text{ et } z'(0) = 1.}$$

c) Pas de primitive à l'aide des fonctions usuelles pour exprimer $z(t)$, mais le résultat du **3)** s'applique à nouveau, puisque (avec des coefficients qui sont bien strictement positifs… à partir du rang 1, mais le résultat ne change pas si l'on ajoute une constante !).

$$a_n \sim \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{donc} \quad z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.$$

En conclusion, du fait des croissances comparées,

$$\boxed{z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}.}$$

Problème A : encore la fonction ζ !

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$; $u_n(s)$ se calcule par primitivation banale :

$$u_n(1) = 1 - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

et, pour $s \neq 1$,

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_{t=n}^{t=n+1} = \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1}\left[(n+1)^{1-s} - n^{1-s}\right],$$

or, avec $h = s-1$, par deux développements limités

$$(n+1)^{1-s} - n^{1-s} = e^{-h\ln(n+1)} - e^{-h\ln n} \underset{h\to 0}{=} -h\ln(n+1) + h\ln n + o(h)$$

d'où

$$u_n(s) \underset{s\to 1}{=} \frac{1}{n^s} - \ln(n+1) + \ln n + o(s-1) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} u_n(1).$$

Donc u_n est continue en 1. Or u_n est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ en vertu des théorèmes opératoires classiques. En conclusion,

$$\boxed{u_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. J'écris à l'aide d'une (habile) intégration par parties :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \left(\left[\frac{t-n-1}{t^s}\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}(t-n-1)\frac{-s}{t^{s+1}}\mathrm{d}t\right) = \int_n^{n+1}(n+1-t)\frac{s}{t^{s+1}}\mathrm{d}t.$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{s+1}}$ est décroissante et $0 \leq n+1-t \leq 1$ pour tout t de $[n, n+1]$, d'où, comme s est positif :

$$\boxed{0 \leq u_n(s) \leq \frac{s}{n^{s+1}}.}$$

c) Pour $0 < a < M$, le résultat précédent montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall s \in [a, M] \quad |u_n(s)| \leq \frac{M}{n^{a+1}}$$

et donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, M]$; or les u_n sont continues sur $[a, M]$ d'après **a)**. Par conséquent la fonction somme U est définie et continue sur $[a, M]$ cela pour tous a, M tels que $0 < a < M$, donc

$$\boxed{U \text{ est définie et continue sur }]0,+\infty[.}$$

d) Notons que pour $s > 0$, $s \neq 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{N^{1-s}}{1-s} = \displaystyle\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s} + \frac{1}{1-s}$

d'où : $H_N(s) - \dfrac{N^{1-s}}{1-s} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} u_n(s) + \frac{1}{N^s} - \frac{1}{1-s}$; comme $s > 0$, j'en déduis :

$$\boxed{\left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \zeta(s) = U(s) - \frac{1}{1-s}.}$$

e) De même, pour $s = 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$: $\ln N = \displaystyle\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t}$, d'où : $H_N(1) - \ln N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} u_n(1) + \frac{1}{N}$; en conclusion :

$$\boxed{(H_N(1) - \ln N)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \gamma = U(1) > 0.}$$

En effet $\sum u_n(1)$ est à termes positifs, donc $U(1) \geq u_1(1) = 1 - \ln 2 > 0$.

2) a) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : s \mapsto (-1)^{n-1}/n^s$; les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et j'ai

$$\forall s > 0 \quad f_n'(s) = (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^s} \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{x^s}\right) = \frac{1 - s\ln x}{x^{s+1}}.$$

Pour pouvoir majorer le reste de la série numérique $\sum f_n'(s)$, je fixe donc $a > 0$ et je travaille sur la demi-droite $[a, +\infty[$; je fixe aussi n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $n_0 > e^{1/a}$, de sorte que $1 - s\ln n < 0$ dès que $s \geq a$ et $n \geq n_0$:

* $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$ (le théorème spécial des séries alternées s'applique à la série numérique $\sum_{n\geq n_0} f_n(s)$, pour tout $s>0$ fixé).

* pour tout $n\geq n_0$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour $s\geq a$ fixé, j'ai $1-s\ln n<0$ pour tout $n\geq n_0$ (par choix de n_0 !), donc la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^s}\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante (calcul ci-dessus) et de limite nulle (croissances comparées, car $s>0$). Donc le théorème spécial des séries alternées s'applique à $\sum_{n\geq n_0} f_n'(s)$ De plus, en notant $R_p=\sum_{n=p+1}^{\infty} f_n'$ j'ai, grâce à la majoration du reste associée au théorème spécial :

$$\forall p\geq n_0\quad \forall s\in\mathbb{R}^{+*}\quad |R_p(s)|\leq\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^s}\leq\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^a}$$

d'où il résulte que la suite de fonction $(R_p)_{p\geq n_0}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$, c'est-à-dire que $\sum_{n\geq n_0} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique donc : $\sum_{n\geq n_0} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Comme une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^1$ est $\mathcal{C}^1$, j'en déduis que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a>0$. En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

b) En séparant classiquement les termes de rangs pairs et impairs, j'obtiens, pour $s>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$,

$$S_{2N}(s)=\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=H_{2N}(s)-2\cdot\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^s}$$

soit

$$\boxed{S_{2N}(s)=H_{2N}(s)-\frac{1}{2^{s-1}}\cdot H_N(s).}$$

D'où, pour $s\neq 1$:

$$S_{2N}(s)=\left(H_{2N}(s)-\frac{(2N)^{1-s}}{1-s}\right)-\frac{1}{2^{s-1}}\cdot\left(H_N(s)-\frac{N^{1-s}}{1-s}\right)$$

et le **1)d)** me donne, à la limite pour $N\to\infty$:

$$\boxed{f(s)=\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\cdot\zeta(s).}$$

c) Par ailleurs : $S_{2N}(s)=\sum_{p=1}^{N}\dfrac{1}{(2p-1)^s}-\sum_{p=1}^{N}\dfrac{1}{(2p)^s}=K_N(s)-\dfrac{1}{2^s}\cdot H_N(s)$

d'où : $K_N(s)-\dfrac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}=S_{2N}(s)+\dfrac{1}{2^s}\cdot\left(H_N(s)-\dfrac{N^{1-s}}{1-s}\right)$,

donc la suite de terme général $K_N(s)-\dfrac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$ converge vers $f(s)+\dfrac{1}{2^s}\cdot\zeta(s)$, soit d'après **b)** :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } K_N(s)-\frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)} \text{ converge vers } \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\zeta(s).}$$

3) La majoration du reste d'une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial permettrait de montrer classiquement que $\sum f_n$ (notations du **2)**) converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$; pour l'étude au voisinage de $+\infty$, je peux chausser de plus gros sabots : $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[2,+\infty[$ (car $\sup_{s\in[2,+\infty[}|f_n(s)|=\dfrac{1}{n^2}$), pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n admet une limite finie b_n en $+\infty$ ($b_1=1$ et $\forall n\geq 2\quad b_n=0$). Le théorème de la double limite permet alors de conclure : la série numérique $\sum b_n$ converge et sa somme est la limite en $+\infty$ de $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$; ainsi

$$\boxed{\lim_{+\infty} f=1.}$$

4) a) Nous avons vu au **1)** que U est continue en 1 et que $\gamma = U(1)$ d'où $U(s) \underset{s\to 1}{=} \gamma + o(1)$; de plus $U(s) = \zeta(s) + \dfrac{1}{1-s}$ d'où finalement

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s\to 1}{=} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).}$$

b) Nous avons vu au **2)a)** que $f'(1)$ s'obtient par dérivation terme à terme :

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

Par ailleurs, pour $h \in]0,1[$, d'après **2)b)** et **5)a)**, les o s'entendant pour $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= \left(1 - 2^{-h}\right) \cdot \zeta(1+h) \\
&= \left(1 - e^{-h\ln 2}\right) \cdot \left(\frac{1}{h} + \gamma + o(1)\right) \\
&= \left(h\ln 2 - \frac{(h\ln 2)^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{h} + \gamma + o(1)\right) \\
&= \ln 2 + \left(\gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right) \cdot h + o(h)
\end{aligned}$$

Le coefficient constant de ce développement limité à l'ordre 1 donne le résultat classique $f(1) = \ln 2$, le coefficient de h n'est autre que $f'(1)$. En conclusion

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \cdot \ln 2.}$$

Problème B : étude qualitative des solutions d'une équation différentielle

1) Si $f \in S$, alors f est au moins deux fois dérivable et sa dérivée seconde $f'' = -qf$ est continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que f est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$: c'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$ et, si c'est vrai pour un entier naturel k, alors $f'' = -qf$ est de classe $\mathcal{C}^{2k}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^{2(k+1)}$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2) **Inégalité de Gronwall** : fixons $y \in \mathbb{R}$ et considérons l'application $g : x \mapsto h(x) \exp\left(\int_x^y u(t)\mathrm{d}t\right)$. En posant $U(x) = \int_y^x u(t)\mathrm{d}t$ (*primitive de u qui s'annule au point y*), j'ai $g(x) = h(x)e^{-U(x)}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \left(h'(x) - u(x)\,h(x)\right) e^{-U(x)} \le 0\ ;$$

la fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, d'où : $x \le y \Rightarrow g(y) \le g(x)$; autrement dit

$$\boxed{x \le y \Rightarrow h(y) \le h(x) \exp\left(\int_x^y u(t)\,\mathrm{d}t\right).}$$

Soit f une solution de (E).

3) **Les solutions sont bornées**

a) J'ai

$$h' = 2ff' + 2f'f'' = 2ff' - 2qff' = 2(1-q)ff'$$

puis

$$h' - (q-1)h = (1-q)(2ff' + h) = (1-q)(2ff' + f^2 + f'^2) = (1-q)\left(f + f'\right)^2 \le 0$$

car $q > 1$ donc $1 - q < 0$. D'où finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) \le \left(q(x) - 1\right) h(x).}$$

b) D'après l'inégalité de Gronwall, j'ai

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\leq y\Rightarrow h(y)\leq h(x)\exp\left(\int_x^y (q(t)-1)\,\mathrm{d}t\right).$$

En fixant $x=0$, j'obtiens

$$\forall y\in\mathbb{R}^+ \quad h(y)\leq h(0)\exp\left(\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}\right)\leq M$$

en posant $M=h(0)\exp\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}\right)$, bien défini puisque la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2+t^4}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $[0,1]$ et majorée par $t\mapsto\dfrac{1}{t^4}$ sur $[1,+\infty[$). Ainsi, la fonction h est majorée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad f(x)^2+f'(x)^2\leq M,$$

ce qui entraîne les majorations $|f(x)|\leq\sqrt{M}$ et $|f'(x)|\leq\sqrt{M}$; en conclusion

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } f' \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^+.}$$

c) Posons $g : x\mapsto f(-x)$. On vérifie que, si f est solution de (E), alors g aussi (*cela résulte essentiellement de la parité de* q), donc g et g' sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{f \text{ et } f' \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^- \text{ et finalement sur } \mathbb{R}.}$$

4) <u>Conditions de nullité en un point</u>

a) La fonction nulle est solution de (E) et vérifie les mêmes conditions initiales que f en a. Donc par unicité

$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle.}}$$

b) J'ai d'après **3)a)** $h'\leq(q-1)h$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Gronwall :

$$a\leq x\Rightarrow h(x)\leq h(a)\exp\left(\int_a^x (q(t)-1)\,\mathrm{d}t\right)=0$$

puisque $h(a)=0$. Ainsi

$$\boxed{\forall x\in[a,+\infty[\quad h(x)\leq 0.}$$

Or par construction $0\leq f^2\leq h$, donc

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } [a,+\infty[.}$$

c) La fonction Φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme f et vérifie

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \Phi''(x)=f''(2a-x)=-q(2a-x)\,\Phi(x).$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{La fonction } r : x\mapsto q(2a-x) \text{ vérifie } \Phi''+r\Phi=0.}$$

d) En observant bien les démonstrations du **3)a)** et du **4)b)**, j'observe que les seules propriétés de la fonction q qui ont servi sont sa continuité et le fait que $q>1$. Or la fonction r les vérifie également et $\Phi(a)=\Phi'(a)=0$, donc le résultat du **4)b)** s'applique : Φ est nulle sur $[a,+\infty[$, c'est-à-dire que f est nulle sur $]-\infty,a]$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}.}$$

Soit f une solution non nulle de (E).

5) <u>Les zéros sont isolés</u>

a) Si $\lim x_n=x$, la continuité de f au point x entraîne $f(x)=0$. Pour tout entier naturel n, j'ai $f(x_n)=f(x_{n+1})=0$ avec $x_n\neq x_{n+1}$, donc il existe un point y_n de $]x_n,x_{n+1}[$ tel que $f'(y_n)=0$ (*théorème de Rolle*). La suite (y_n) converge aussi vers x (car $|y_n-x|\leq\max(|x_n-x|,|x_{n+1}-x|)$), et f' est continue au point x, donc $f'(x)=0$. De la question **4)**, je déduirais que f est la fonction nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) Raisonnons par l'absurde : si f admettait une infinité de zéros dans $[a,b]$, je pourrais construire une suite (x_n) de zéros de f dans $[a,b]$ qui soient deux à deux distincts. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permettrait alors d'en extraire une suite convergeant vers un réel x de $[a,b]$. D'après la question **a)**, j'aurais alors $f = 0$, ce qui est absurde. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } f \text{ dans un segment } [a, b] \text{ est fini.}}$$

6) Comparaison avec les solutions de l'équation limite $y'' + y = 0$

a) La solution générale de (F) est $y = A\cos(x) + B\sin(x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

b) Soit x réel. Le système

$$\begin{cases} \cos(x)\, a(x) + \sin(x)\, b(x) = f(x) \\ -\sin(x)\, a(x) + \cos(x)\, b(x) = f'(x) \end{cases},$$

d'inconnues $a(x)$ et $b(x)$, est de déterminant 1. Son unique solution est obtenue par exemple par combinaisons :

$$\boxed{\begin{cases} a(x) = f(x)\cos(x) - f'(x)\sin(x) \\ b(x) = f(x)\sin(x) + f'(x)\cos(x) \end{cases}.}$$

Les fonctions a et b ainsi définies sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en vertu des théorèmes opératoires classiques car f l'est.

Les fonctions f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$ (question **3**) et les fonctions sin et cos le sont aussi, donc

$$\boxed{a \text{ et } b \text{ sont } \mathcal{C}^\infty \text{ et bornées sur } \mathbb{R}.}$$

c) En dérivant j'obtiens $a'(x) = -\big(f''(x) + f(x)\big)\sin(x)$. Or, $f'' + qf = 0$, donc $f'' + f = (1 - q)f$, d'où

$$\boxed{a'(x) = (q(x) - 1)\sin(x)\, f(x).}$$

De même, $b'(x) = \big(f''(x) + f(x)\big)\cos(x)$ d'où

$$\boxed{b'(x) = \big(1 - q(x)\big)\cos(x)\, f(x).}$$

d) Comme a est $\mathcal{C}^1$, je peux écrire pour tout réel x grâce à l'expression précédente de a'

$$a(x) = a(0) + \int_0^x (q(t) - 1)\, f(t)\sin t \mathrm{d}t = a(0) + \int_0^x \frac{f(t)\sin t}{1 + t^2 + t^4}\mathrm{d}t.$$

Or, la fonction $t \mapsto f(t)\sin t$ est bornée, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)\sin t}{1 + t^2 + t^4}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $a(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Même raisonnement pour $b(x)$ à partir de

$$b(x) = b(0) - \int_0^x \frac{f(t)\cos t}{1 + t^2 + t^4}\mathrm{d}t.$$

En conclusion

$$\boxed{a \text{ et } b \text{ admettent des limites finies en } +\infty.}$$

e) Posons $A = \lim\limits_{+\infty} a$ et $B = \lim\limits_{+\infty} b$; j'ai alors

$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \varphi(x) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \big(a(x) - A\big)\cos x + \big(b(x) - B\big)\sin x.$$

Comme cos et sin sont bornées j'ai $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$, donc $g : x \mapsto A\cos x + B\sin x$ convient :

$$\boxed{\text{Il existe une solution } g \text{ de } (F) \text{ telle que } \lim_{+\infty}(f - g) = 0.}$$

7) Étude (partielle) du développement en série entière des solutions de (E)

a) Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ solution de (E) sur $]-R, R[$.

(i) J'ai

$$(1 + x^2 + x^4)\big(f''(x) + f(x)\big) + f(x) = 0,$$

soit

$$f''(x) + x^2 f''(x) + x^4 f''(x) + 2f(x) + x^2 f(x) + x^4 f(x) = 0,$$

soit encore, au prix de quelques réindexations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)nc_n x^n + \sum_{n=4}^{+\infty}(n-3)(n-2)c_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2}x^n + \sum_{n=4}^{+\infty} c_{n-4}x^n = 0.$$

En annulant successivement les coefficients de x^0, x^1, x^2 et x^3 (*unicité du développement en série entière*), j'obtiens les relations

$$c_2 = -c_0 \quad ; \quad c_3 = -\frac{1}{3}c_1 \quad ; \quad c_4 = -\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{12}c_0 \quad ; \quad c_5 = -\frac{2}{5}c_3 - \frac{1}{20}c_1.$$

En annulant le coefficient de x^n pour $n \geq 4$, j'obtiens la relation

$$c_{n+2} = \frac{-n^2+n-2}{(n+1)(n+2)}c_n + \frac{-n^2+5n-7}{(n+1)(n+2)}c_{n-2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}c_{n-4}.$$

(ii) Pour $n \geq 4$, j'ai donc

$$\begin{aligned} |c_{n+2}| &\leq \frac{n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}|c_n| + \frac{n^2-5n+7}{(n+1)(n+2)}|c_{n-2}| + \frac{1}{(n+1)(n+2)}|c_{n-4}| \\ &\leq \frac{2n^2-6n+10}{(n+1)(n+2)} \max\left(|c_n|, |c_{n-2}|, |c_{n-4}|\right). \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-6n+10}{(n+1)(n+2)} = 2$ donc, pour $\beta > 2$ fixé, par définition de la limite, il existe un entier $N \geq 4$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow 0 \leq \frac{2n^2-6n+10}{(n+1)(n+2)} \leq \beta.$$

Alors d'après ce qui précède

$$\boxed{\text{Pour } n \geq N,\ |c_{n+2}| \leq \beta \max\left(|c_n|, |c_{n-2}|, |c_{n-4}|\right).}$$

(iii) Soit $\beta > 2$ et $N \geq 4$ comme ci-dessus. Notons $C_1 = \max\left(|c_N|, |c_{N-2}|, |c_{N-4}|\right)$. Je montre par récurrence forte sur q que $|c_{N+2q}| \leq C_1\beta^q$ pour tout q dans $\mathbb{N}$.

- <u>*Initialisation*</u> : pour $q = 0$, j'ai bien $|c_N| \leq C_1$ par définition de C_1 ; pour $q = 1$, j'ai
$$|c_{N+2}| \leq \beta \max\left(|c_N|, |c_{N-2}|, |c_{N-4}|\right) = C_1\beta\ ;$$
enfin pour $q = 2$ (j'ai besoin de 3 “prédécesseurs” !) j'ai de même
$$|c_{N+4}| \leq \beta \max\left(|c_{N+2}|, |c_N|, |c_{N-2}|\right) \leq \beta \cdot C_1\beta = C_1\beta^2$$
car $|c_N|$ et $|c_{N-2}|$ sont majorés par C_1 par construction, donc par $C_1\beta$ car $\beta > 1$, or $|c_{N+2}|$ est également majoré par $C_1\beta$ d'après le point précédent.
- <u>*Hérédité*</u> : si $q \geq 2$ est tel que $|c_{N+2k}| \leq C_1\beta^k$ pour tout $k \leq q$, alors d'après **(ii)**
$$\left|c_{N+2(q+1)}\right| = |c_{N+2q+2}| \leq \beta \max\left(|c_{N+2q}|, \left|c_{N+2(q-1)}\right|, \left|c_{N+2(q-2)}\right|\right),$$
or, grâce à l'hypothèse de récurrence et au fait que $\beta > 1$, ces trois dernières valeurs sont majorées par $C_1\beta^q$, d'où finalement $\left|c_{N+2(q+1)}\right| \leq C_1\beta^{q+1}$, ce qui achève cette preuve par récurrence.

De même, en notant $C_2 = \max\left(|c_{N+1}|, |c_{N-1}|, |c_{N-3}|\right)$, j'obtiens

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad |c_{N+2q+1}| \leq C_2\beta^q.$$

Comme $\beta > 1$, j'ai $\beta^q \leq \beta^{2q}$ et $\beta^q \leq \beta^{2q+1}$. En notant $C_0 = \max(C_1, C_2)$, j'en déduis

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |c_{N+k}| \leq C_0\beta^k \quad \text{soit} \quad \forall p \geq N \quad |c_p| \leq \frac{C_0}{\beta^N}\beta^p.$$

Soit (enfin !)

$$C = \max\left(|c_0|, \frac{|c_1|}{\beta}, \ldots, \frac{|c_{N-1}|}{\beta^{N-1}}, \frac{C_0}{\beta^N}\right).$$

Par construction,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |c_n| \leq C\beta^n.}$$

(iv) Soit $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et x non nul dans I ; j'ai $\dfrac{1}{|x|} > 2$ de sorte que je peux fixer β tel que $2 < \beta < \dfrac{1}{|x|}$.

D'après le **(iii)** je dispose de $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |c_n x^n| \leq C\left(\beta|x|\right)^n\ ;$$

or $\beta|x| < 1$ par construction. Donc la série numérique $\sum |c_n x^n|$ converge (car dominée par une série géométrique convergente). Cela pour tout x de I. Par conséquent

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } f \text{ est supérieur ou égal à } \frac{1}{2}.}$$

Notons pour conclure cette question que — réciproquement — toute fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où la suite (c_n) vérifie les relations (S) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, car le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{1}{2}$ d'après **(iv)**. De plus il est aisé de vérifier que f est solution de (E) sur I en "remontant" les calculs du **(i)**.

b) Notons que, dans (S), les coefficients c_0 et c_1 sont arbitraires et déterminent entièrement la suite (c_n). Si je note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions développables en série entière sur I dont les coefficients vérifient (S), alors $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (intersection du plan vectoriel $\mathcal{S}_I$ des solutions de (E) sur I et de l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière sur I).

Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_I$; or $\mathcal{S}$ contient la famille (φ_0, φ_1), où φ_0 correspond au choix $\{c_0 = 1 \, , \, c_1 = 0\}$ et φ_1 correspond au choix $\{c_0 = 0 \, , \, c_1 = 1\}$). Or cette famille est libre car par construction

$$\varphi_0\,(0) = 1, \;\; \varphi_0'\,(0) = 0, \;\; \varphi_1\,(0) = 0, \;\; \varphi_1'\,(0) = 1.$$

Il en résulte que $\mathcal{S}$ coïncide avec le plan vectoriel $\mathcal{S}_I$, ce qui montre que

$$\boxed{\text{Toutes les solutions de } (E) \text{ sont développables en série entière sur } \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.}$$

Le lecteur avisé remarquera que — en majorant moins brutalement au **a)-(iii)** — on pourrait remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{\sqrt{2}}$...