Exercice

1) La série numérique $\sum u_n(0)$ converge banalement et a pour somme 0. Fixons donc $x \neq 0$; j'ai $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann : $2 > 1$). Comme en outre $\dfrac{1}{xn^2}$ est de signe constant (celui de x), il en résulte que $\sum u_n(x)$ converge également. Finalement,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Notons que — comme toutes les fonctions u_n sont impaires — la fonction somme S est impaire.

2) Je fixe $n \in \mathbb{N}^*$. En vertu des théorèmes opératoires classiques, u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Comme u_n est impaire, j'étudie pour commencer ses variations sur $\mathbb{R}^+$: elle y est positive et atteint son maximum en $1/\sqrt{n}$, maximum valant

$$u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

De l'imparité de u_n, je déduis alors que $\sup_{\mathbb{R}} |u_n| = \dfrac{1}{2n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, la série numérique $\sum \sup_{\mathbb{R}} |u_n|$ converge, autrement dit

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

En particulier, $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$; comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, il en résulte que

$$\boxed{\text{La fonction somme } S \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

3) Je montre pour commencer que S est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de la forme $[a, M]$ où $0 < a < M$:

- les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, M]$;
- $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, M]$ (vu au **1)**) ;
- $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, M]$: j'ai

  $$\forall x \in [a, M] \quad |u_n'(x)| \leq \frac{1 + nM^2}{n(1+na^2)^2}.$$

  Autrement dit

  $$\sup_{[a,M]} |u_n'| \leq \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2} \quad \text{or} \quad \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M^2}{a^2n^2}.$$

  Ainsi, $\sup_{[a,M]} |u_n'|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (par comparaison à une série de Riemann, puisque $2 > 1$). Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, M]$.

Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions s'applique donc : S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, M]$, pour tout (a, M) tel que $0 < a < M$, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et aussi sur $\mathbb{R}^{-*}$ puisqu'elle est impaire. En particulier,

$$\boxed{S \text{ est dérivable en tout point } x \neq 0.}$$

4) a) Pour tout réel x non nul et tout $N \in \mathbb{N}^*$, j'ai, puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \quad \text{soit} \quad \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x}.$$

Je pose alors (habilement) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ et, pour x tel que $0 < |x| < \alpha$, j'ai

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad nx^2 \leq N\alpha^2 = 1 \quad \text{donc} \quad 0 < 1 + nx^2 \leq 2 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{1+nx^2} \geq \frac{1}{2}$$

et, par sommation

$$\boxed{\text{Pour } 0 < |x| < \alpha,\ \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.}$$

b) Soit $A > 0$; puisque la série harmonique diverge, je dispose de N dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > A$. J'en déduis, grâce à la question précédente, $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |x| < \alpha \Rightarrow \frac{S(x)}{x} > A.$$

Ainsi, $\mathbb{R}^*$ étant l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$:

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad |x| < \alpha \Rightarrow \frac{S(x)}{x} > A.$$

Je reconnais la définition d'une limite infinie :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x} = +\infty.}$$

c) Comme $S(0) = 0$, $\frac{S(x)}{x}$ n'est autre que le taux de variation de la fonction S entre 0 et x, le résultat précédent signifie donc que

$$\boxed{S \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

On peut préciser que le graphe de S admet une tangente en O portée par l'axe Oy.

Problème A

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &= \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}\left[\ln(n+1) - \ln n\right] \\ &= \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln(p+1) + \ln 1 \\ &= \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p - \ln\frac{p+1}{p}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$, la série de terme général $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est convergente (par comparaison à une série de Riemann : $2 > 1$). De plus, $\ln\frac{p+1}{p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, or, d'après le calcul précédent,

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln\frac{p+1}{p}.$$

J'en déduis l'existence de la limite demandée et, par passage à la limite :

$$\boxed{\gamma = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).}$$

2) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$; puisque t est positif, $-t$ est différent de 1 et je peux appliquer la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t$:

$$\sum_{k=0}^{p}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{p+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t},$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, x] \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t}.}$$

J'en déduis, pour $p \in \mathbb{N}^*$, en intégrant de 0 à x et en réindexant la somme :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} \mathrm{d}t \,,$$

or, x étant dans $[0,1]$,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{p+1} \mathrm{d}t = \frac{x^{p+2}}{p+2} \leq \frac{1}{p+2}.$$

Le "reste" intégral a donc pour limite 0 lorsque p tend vers l'infini ; il en résulte que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ converge et a pour somme $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.}$$

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le résultat précédent s'applique avec $x = \dfrac{1}{n}$, d'où

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \,,$$

ce qui donne, reporté dans l'expression du **1)** :

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right).}$$

4) a) Les résultats sur la convergence des séries de Riemann montrent que ζ est définie sur $]1, +\infty[$; de plus, si $1 < \alpha < \alpha'$, j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^\alpha \leq n^{\alpha'} \text{ , donc } \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^{\alpha'}} \,,$$

d'où

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^{\alpha'}}.$$

En passant à la limite lorsque p tend vers l'infini (les deux séries convergent !) j'obtiens

$$\zeta(\alpha) \geq \zeta(\alpha').$$

En conclusion (sans dérivation terme à terme. . .) :

$$\boxed{\zeta \text{ est définie et décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

Soient $x \in [1, +\infty[$ fixé et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; d'après la minoration ci-dessus (avec $\alpha = k$, $\alpha' = k+1$ et $p = E(x)$), j'ai $\sum\limits_{n=1}^{E(x)} \dfrac{1}{n^k} \geq \sum\limits_{n=1}^{E(x)} \dfrac{1}{n^{k+1}}$, d'où, comme $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{k+1}$, $|f_k(x)| \geq |f_{k+1}(x)|$.

De plus, puisque ζ est décroissante, $|f_k(x)| \leq \dfrac{1}{k}\zeta(k) \leq \dfrac{\zeta(2)}{k}$.

Il en découle que $|f_k(x)|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, donc finalement

$$\boxed{\text{La suite } (|f_k(x)|)_{k \geq 2} \text{ converge vers 0 en décroissant.}}$$

b) Le résultat précédent montre que, pour tout x de $[1, +\infty[$, la série alternée $\sum f_k(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial, donc converge, avec en outre la majoration du reste $R_p = \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} f_k$:

$$\forall p \geq 2 \quad \forall x \in [1, +\infty[\quad |R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)| \leq \frac{\zeta(2)}{p+1}, \quad \text{d'où} \quad \sup_{[1,+\infty[} |R_p| \leq \frac{\zeta(2)}{p+1} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent la suite (R_p) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k \geq 2} f_k \text{ est uniformément convergente sur } [1, +\infty[.}$$

5) D'après le **3)**,
$$\gamma = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right).$$
Pour $x \geq 1$ fixé, j'ai affaire à un nombre fini de séries convergentes (pour $1 \leq n \leq E(x)$), d'où, par linéarité de la somme dans l'espace des séries numériques convergentes :
$$\sum_{n=1}^{E(x)} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{E(x)} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) \ ;$$
donc
$$\boxed{\gamma = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x).}$$
Enfin, la série de fonctions $\sum f_k$ convergeant uniformément sur $[1, +\infty[$, $+\infty$ étant adhérent à cet intervalle et chaque fonction f_k admettant une limite finie en $+\infty$ (à savoir $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$), je peux appliquer le théorème de la double limite :
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$
D'où, en comparant les deux derniers résultats :
$$\boxed{\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).}$$

Problème B

1) Comme $1 + e^x$ est non nul pour tout réel x, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et j'obtiens
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1 + e^x - xe^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \cdot \left(e^{-x} + 1 - x\right) \ ;$$
$f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = e^{-x} + 1 - x$; or l'application g ainsi définie est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; elle admet pour limite respectives $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$: c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit donc α l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$; α est aussi l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$; en outre g est décroissante et $g(1) = e^{-1} > 0$, donc $\alpha > 1$; enfin, la relation $g(\alpha) = 0$ me donne
$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{d'où} \quad 1 + e^\alpha = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{donc} \quad f(\alpha) = \alpha - 1.$$
En conclusion,
$$\boxed{\text{L'équation } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha > 1 \text{ et } f(\alpha) = \alpha - 1.}$$
De plus g (et donc f') est positive sur $]-\infty, \alpha]$, négative sur $[\alpha + \infty[$. Enfin, $f(x) \underset{-\infty}{\sim} x$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

2) Pour $n = 0$, j'ai bien : $\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq u_0(x) = 1 \leq 1$.
Si je prends comme hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq u_n(x) \leq 1$, j'obtiens pour $x \in [0, 1]$:
$$-1 \leq -1 + \frac{1}{2} \cdot u_n(x) \leq -\frac{1}{2} \quad \text{d'où } (x \geq 0) \quad -x \leq -x + \frac{x}{2} \cdot u_n(x) \leq -\frac{x}{2} \ ;$$
en ajoutant 1 et en multipliant par $u_n(x)$ (≥ 0 d'après l'hypothèse de récurrence) j'obtiens
$$(1 - x) \cdot u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot u_n(x) \ ; \qquad (1)$$

il en résulte en particulier que $0 \leq u_{n+1}(x) \leq 1$, ce qui achève cette première démonstration par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad 0 \leq u_n(x) \leq 1.}$$

Notons qu'une récurrence immédiate montre que les u_n sont des fonctions polynomiales, donc dérivables. En outre :

- Pour $n = 0$, j'ai bien $\forall x \in [0,1] \quad u_0'(x) = 0 \leq 0$;
- Si je prends comme hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1] \quad u_n'(x) \leq 0$, j'obtiens

$$\forall x \in [0,1] \quad u_{n+1}'(x) = \left[1 - x + \frac{x}{2} \cdot u_n(x)\right] \cdot u_n'(x) + \left[-1 + \frac{1}{2} \cdot u_n(x) + \frac{x}{2} \cdot u_n'(x)\right] \cdot u_n(x)$$

or, d'après ce qui précède et grâce à l'hypothèse de récurrence, le premier crochet est positif et le second négatif, d'où finalement $u_{n+1}'(x) \leq 0$; j'ai bien montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad u_n'(x) \leq 0.}$$

3) a) L'encadrement (1) obtenu à la question précédente permet d'établir par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad (1-x)^n \leq u_n(x) \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.}$$

b) Le théorème des gendarmes donne alors immédiatement la limite de la suite numérique $(u_n(x))$ pour x dans $[0,1]$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } u : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}.}$$

Je constate que u est discontinue en 1 alors que les u_n sont continues sur $[0,1]$; s'il y avait convergence uniforme sur $[0,1]$, u serait continue sur $[0,1]$, par conséquent :

$$\boxed{\text{Il n'y a pas convergence uniforme sur } [0,1].}$$

En revanche, pour $\varepsilon \in]0,1[$, j'ai, grâce à **a)** :

$$\forall x \in [\varepsilon, 1] \quad 0 \leq u_n(x) \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \quad \text{d'où} \quad \sup_{[\varepsilon,1]} |u_n| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } [\varepsilon, 1] \text{ pour tout } \varepsilon \text{ de }]0,1[.}$$

c) Soit $x \in [0,1]$; j'ai vu au **2)** que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - x + \frac{x}{2} \cdot u_n(x) \leq 1 \quad \text{d'où} \quad u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \ \ (\text{car } u_n(x) \geq 0).$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0,1], \text{ la suite } \big(u_n(x)\big) \text{ est décroissante.}}$$

4) a) La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et : $\forall t \in [0,1] \quad h'(t) = 1 - t$ donc $|h'(t)| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis me permet donc de conclure que h est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$, autrement dit :

$$\boxed{\forall (a,b) \in [0,1]^2 \quad |h(a) - h(b)| \leq |a - b|.}$$

b) Soient x dans $[0,1]$ et k dans $\mathbb{N}$; j'ai $u_k(x) - u_{k+1}(x) = x.h[u_k(x)]$ donc d'après **a)** :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \big|[u_k(x) - u_{k+1}(x)] - [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)]\big| \leq x \cdot \big|u_k(x) - u_{k+1}(x)\big|}$$

Tout réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue et $u_k(x) - u_{k+1}(x) \geq 0$ d'après **3)c)** ; le résultat précédent me donne donc

$$(1-x) \cdot [u_k(x) - u_{k+1}(x)] \leq [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)].$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_k(x) - u_{k+1}(x) \leq \frac{u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)}{1-x}.}$$

5) a) Soit k dans $\mathbb{N}$; h est croissante et strictement positive sur $]0,1]$, or $x \in [0,1[$ donc, grâce au **3)a)** et au **3)c)**, $0 < u_{k+1}(x) \leq u_k(x)$; j'en déduis :

$$\forall t \in [u_{k+1}(x), u_k(x)] \quad \frac{1}{h[u_k(x)]} \leq \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h[u_{k+1}(x)]}$$

d'où en intégrant :

$$\frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{h[u_k(x)]} \leq \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{h[u_{k+1}(x)]}\ ;$$

il en résulte grâce à **4)b)** :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad x \leq \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{x}{1-x}.}$$

b) En ajoutant les inégalités précédentes, pour $k=0,\ldots,n-1$, j'obtiens, grâce à la relation de Chasles :

$$\boxed{nx \leq \int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{nx}{1-x}.}$$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{h}$ donne : $\forall t \in\,]0,1] \quad \dfrac{1}{h(t)} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2-t}$, d'où

$$\int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} = -\ln u_n(x) + \ln[2-u_n(x)] = \ln\left(\frac{2}{u_n(x)}-1\right).$$

J'en déduis, grâce à l'encadrement précédent et à la croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{nx} \leq \frac{2}{u_n(x)} - 1 \leq e^{nx/(1-x)}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\frac{2}{1+e^{nx/(1-x)}} \leq u_n(x) \leq \frac{2}{1+e^{nx}}.}$$

6) a) Soient n dans $\mathbb{N}$ et $x = \dfrac{\alpha}{n+\alpha}$; il vient $\dfrac{nx}{1-x} = \alpha$ donc, d'après **5)b)** :

$$v_n(x) = x.u_n(x) \geq \frac{\alpha}{n+\alpha}\cdot\frac{2}{1+e^{\alpha}} = \frac{2f(\alpha)}{n+\alpha}$$

d'où, grâce à l'étude du **1)** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}\ .}$$

Il en résulte, par définition de M_n, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n \geq \dfrac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$.

Par ailleurs, toujours d'après le **5)b)**, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0,1[\quad v_n(x) \leq \frac{2x}{1+e^{nx}} = \frac{2}{n}\cdot f(nx) \leq \frac{2}{n}\cdot(\alpha-1)$$

puisque $\alpha - 1$ est le maximum de f. Cette majoration reste valable pour $x=1$, par continuité de v_n (qui est un polynôme !). En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}\ .}$$

b) Il résulte de l'encadrement précédent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2n(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq nM_n \leq 2(\alpha-1)\ ;$$

comme $\dfrac{2n(\alpha-1)}{n+\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2(\alpha-1)$, le théorème d'encadrement montre que $nM_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2(\alpha-1)$, autrement dit

$$\boxed{M_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2(\alpha-1)}{n}.}$$

En particulier, la suite (M_n) converge vers 0, autrement dit :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } [0,1].}$$