D.L. 2

Problème A

On se propose de calculer une valeur approchée de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

On examinera plusieurs méthodes en essayant d'en préciser l'efficacité.

On pose, pour tout p *dans* $\mathbb{N}^*$ *:*

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

1) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que :

$$\frac{1}{2\,(p+1)^2} \leq R_p \leq \frac{1}{2p^2}. \tag{1}$$

Déterminer le plus petit entier p tel que $\frac{1}{2p^2} < 10^{-8}$.

2) Pour améliorer la méthode précédente, on pose :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \overline{S_p} = S_p + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2\,(p+1)^2} + \frac{1}{2p^2}\right].$$

À l'aide de l'encadrement (1), montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \left|S - \overline{S_p}\right| \leq \frac{1}{2p^3}.$$

Déterminer le plus petit entier p tel que $\frac{1}{2p^3} < 10^{-8}$.

3) On pose maintenant :

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\right] \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad R'_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\right].$$

a) Justifier l'existence de S' et expliquer comment la valeur de S se déduirait de celle de S'.

(On remarquera que : $\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n\,(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right]$*).*

b) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(p+3)^3} \leq R'_p \leq \frac{1}{p^3}.$$

c) On pose alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad S'_p = \sum_{n=1}^{p} \left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\right] \quad \text{et} \quad \overline{S'_p} = S'_p + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{(p+3)^3} + \frac{1}{p^3}\right].$$

Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \left|S' - \overline{S'_p}\right| \leq \frac{9}{2p^4}.$$

Déterminer le plus petit entier p tel que $\frac{9}{2p^4} < 10^{-8}$.

4) On pose enfin, a, b, c étant trois réels fixés :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad \delta_n = U_{n-1} - U_n.$$

a) Déterminer a, b, c pour que δ_n soit un infiniment petit d'ordre maximal dans l'échelle des puissances de $\dfrac{1}{n}$.

b) a, b, c étant ainsi choisis, établir :

$$\forall p \geq 2 \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} \delta_n \leq \frac{1}{12\,(p-1)^6} \quad \text{et} \quad U_p - \frac{1}{12\,(p-1)^6} \leq S \leq U_p.$$

c) En déduire une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à 10^{-8} (on donnera la valeur utilisée pour p et toutes les décimales fournies par la calculatrice pour U_p).

Problème B

Première partie

Soit f une application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes : f est continûment dérivable, f' est décroissante et $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante, non bornée, d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n f'(x_n)$ est convergente.

2) Soient x, y deux réels distincts, strictement positifs.

a) Montrer qu'il existe une constante A telle que l'application G de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$G : z \mapsto F(z) - F(x) - (z-x)\,f(x) - \frac{(z-x)^2}{2}A,$$

s'annule pour $z = y$.

b) En déduire qu'il existe c, strictement compris entre x et y, tel que $A = f'(c)$.

3) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe y_n dans l'intervalle $\left]n, n+\dfrac{1}{2}\right[$ tel que :

$$F\left(n+\frac{1}{2}\right) - F(n) = \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{8}f'(y_n).$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe z_n dans l'intervalle $\left]n+\dfrac{1}{2}, n+1\right[$ tel que :

$$F(n+1) - F\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(n+1) - \frac{1}{8}f'(z_n).$$

4) Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$U_n(f) = \frac{1}{2}f(1) + \sum_{p=2}^{n-1} f(p) + \frac{1}{2}f(n) - F(n).$$

a) Montrer que la suite $\big(U_n(f)\big)$ est convergente. On notera $U(f)$ sa limite.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq U_n(f) - U(f) \leq \frac{1}{8}f'(n).$$

5) En considérant l'application $f_1 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, montrer l'existence d'une constante γ, telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln n\right)=\gamma.$$

Donner un développement limité à l'ordre 1 en $\dfrac{1}{n}$ de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln n$.

6) En considérant l'application $f_2 : x \mapsto \ln x$, montrer l'existence d'une constante β, telle que

$$0 \leq \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n - 1 + \beta \leq \frac{1}{8n}.$$

En déduire que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1-\beta}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Deuxième partie

Pour tout p de $\mathbb{N}$, on pose (*intégrales de* Wallis) :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^p t \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que, pour tout $p > 1$, on a : $pI_p = (p-1)\, I_{p-2}$.

2) Montrer que la suite (I_p) est décroissante et positive. En déduire que $I_{p-1} \sim I_p$.

3) Montrer que $I_p \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$ et en déduire la *formule de* Stirling *:*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Troisième partie : amélioration de la formule de Stirling

Dans cette partie, k désigne un entier au moins égal à 2. On pose :

$$w_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_k = \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)\,(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$w_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t \mathrm{d}t.$$

2) À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que :

$$I_k = \ln k - \ln(k-1) - 2w_k.$$

En déduire que la série de terme général I_k converge et calculer sa somme *(on pourra utiliser la formule de* Stirling*)*.

3) À l'aide d'une troisième intégration par parties, en remarquant que :

$$(t-k+1)\,(k-t) = \varphi'(t-k+1) \quad \text{où} \quad \varphi : x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

et en déterminant $\displaystyle\max_{x\in[0,1]} \varphi(x)$, établir :

$$\left|I_k - \frac{1}{6k^2}\right| \leq \frac{1}{3}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

Montrer enfin que :

$$\left|\frac{1}{k^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right| \leq 2\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

En déduire que, pour tout couple (n,p) d'entiers tels que $1 \leq n < p$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} I_k - \frac{1}{6n} + \frac{1}{6p}\right| \leq \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3p^2}.$$

4) Conclure que :

$$n! \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$