D.L. 1

Problème A : *polynômes de Legendre*

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. Les polynômes considérés sont dans $\mathbb{R}[X]$. On confondra polynôme et fonction polynomiale.

I – Interpolation de Lagrange

Soient $x_1, \ldots, x_n$ n réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$. On considère les polynômes suivants :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \quad \text{et, pour } 1 \leq j \leq n, \quad Q_j = \frac{P_n}{X - x_j}.$$

Soit enfin f une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme g de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}_n \quad g(x_k) = f(x_k)$.
Exprimer g à l'aide de f, des Q_j et des x_j.

2) Pour calculer une valeur approchée de $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$, on calcule $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que l'application qui à f associe $J(f)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si f est un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$, alors : $J(f) = I(f)$.

II – Choix des points d'interpolation

On cherche dans cette partie à choisir $x_1, \ldots, x_n$ de façon à ce que $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de degré au plus égal à p, avec p le plus grand possible.

1) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à n. Montrer que $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de $\mathbb{R}_p[X]$ si et seulement si P_n vérifie la propriété suivante :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X] \quad \int_{-1}^{1} P_n(t) \cdot Q(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que, si cette propriété est vérifiée, alors $p \leq 2n - 1$.

2) Montrer par récurrence l'existence d'une unique suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, L_n soit unitaire, de degré n et que

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad k < n \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_k(t) \cdot L_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(On pourra rechercher L_n sous la forme : $X^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} \lambda_j.L_j$.)

3) **a)** En utilisant l'unicité établie au **2)** et à l'aide d'intégrations par parties, établir que

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} \cdot U_n^{(n)} \quad \text{(dérivée } n\text{-ième du polynôme } U_n = \left(X^2 - 1\right)^n\text{)}.$$

b) En partant de cette expression et à l'aide du théorème de Rolle, démontrer que, pour n non nul, L_n possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Etudier la parité de L_n.

4) Montrer que, si l'on choisit $P_n = L_n$, alors $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de degré au plus égal à $2n - 1$.

III – Exemple : formule de Gauss à l'ordre 3

1) Montrer que L_3 s'écrit : $L_3 = X\left(X^2 - \alpha^2\right)$ avec $\alpha \in]0,1[$ à préciser.

2) Avec les notations des parties précédentes, on choisit $P_3 = L_3$. On a donc $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de $\mathbb{R}_5[X]$. Montrer que, pour toute application f continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, $J(f)$ s'écrit :

$$J(f) = u.f(0) + v.\left[f(-\alpha) + f(\alpha)\right] \qquad \text{avec } u, v \text{ réels à préciser.}$$

Pour majorer l'erreur de méthode, on considère désormais une application f de classe C^6 sur $[-1,1]$.

3) **a)** À l'aide de l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}^6$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$ associe

$$\left(P(0), P'(0), P(-\alpha), P'(-\alpha), P(\alpha), P'(\alpha)\right),$$

montrer qu'il existe un unique polynôme G de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$G(0) = f(0)\ ;\ G'(0) = f'(0)\ ;\ G(-\alpha) = f(-\alpha)\ ;\ G'(-\alpha) = f'(-\alpha)\ ;\ G(\alpha) = f(\alpha)\ ;\ G'(\alpha) = f'(\alpha).$$

b) Établir

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x) - G(x)| \leq \frac{M_6}{720} \cdot [L_3(x)]^2 \quad \text{où} \quad M_6 = \sup_{[-1,1]} \left|f^{(6)}\right|.$$

(On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire $\varphi : t \mapsto f(t) - G(t) - A.[L_3(t)]^2$, le réel A étant choisi tel que $\varphi(x) = 0$.)

c) En déduire que

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{M_6}{15\ 750}.$$

Problème B : *splines cubiques*

Soient $a < b$ deux réels et $n \geq 3$ un entier.

On désigne par $\mathcal{C}^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.

On divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on considère les $(n+1)$ points de $[a,b]$: $x_k = a + k \cdot h,\ k = 0,\ldots,n$.

On se donne une fonction numérique f définie sur $[a,b]$ et on note f_k ses valeurs aux points x_k, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\} \quad f_k = f(x_k).$$

Si α et β sont deux réels donnés, on désigne par $\mathbf{W}(f,\alpha,\beta)$ l'ensemble des fonctions numériques u qui vérifient les trois propriétés :

P1) u appartient à $\mathcal{C}^2[a,b]$.
P2) u coïncide avec f en chaque point x_k : $\forall k \in \{0,\ldots,n\} \quad u(x_k) = f_k$.
P3) $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$.

On désigne par $\mathbb{S}$ l'ensemble des fonctions numériques u de $\mathcal{C}^2[a,b]$ qui vérifient la propriété :

P4) Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ $(k = 1,\ldots,n)$, u est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

On désigne par $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ à des matrices à $(n+1)$ lignes et une colonne.

On note par $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\text{pour } \vec{a} = (a_0,\ldots,a_n) \text{ et } \vec{b} = (b_0,\ldots,b_n), \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

I – Interpolation de f par une fonction de $\mathbb{S}$

Les réels α, β étant donnés, on cherche une fonction G de $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$ qui soit dans $\mathbb{S}$.

1) Soit $\vec{m} = \sum_{k=0}^{n} m_k.\vec{e}_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Soit k un entier de $\{1, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à 3, P_k, tel que :

$$P_k(x_{k-1}) = f_{k-1} \ ; \ P_k(x_k) = f_k \ ; \ P_k''(x_{k-1}) = m_{k-1} \ ; \ P_k''(x_k) = m_k \ .$$

On cherchera P_k sous la forme :

$$P_k(x) = a_0 (x_k - x)^3 + b_0 (x - x_{k-1})^3 + a_1 (x_k - x) + b_1 (x - x_{k-1})$$

et on explicitera les coefficients (a_0, a_1, b_0, b_1) en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k, h)$.

b) On considère la fonction g dont la restriction à $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, \ldots, n)$ est P_k.

Vérifier que g est bien définie et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ est que :

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2} (f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) \ , \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

c) En déduire qu'une CNS pour que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et vérifie $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, est que le vecteur $\vec{m}$ soit solution d'un système linéaire de la forme :

$$(S) \quad A \cdot \vec{m} = \vec{b},$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $(2, 4, 4, \ldots, 4, 2)$ et $\vec{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, que l'on précisera. On ne cherchera pas à résoudre ce système.

Que remarque-t-on quant à la forme de A ?

2) Soit $\vec{v} = \sum_{k=0}^{n} v_k.\vec{e}_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Montrer que $\langle A \cdot \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

b) En déduire que A est inversible.

c) En déduire l'existence et l'unicité de la fonction G cherchée.

3) On suppose pour cette question que $\alpha = \beta = 0$. Montrer que le vecteur $\vec{b}$ du membre de droite de (S) est de la forme $\vec{b}=H \cdot \vec{f}$, où $\vec{f} = \sum_{k=0}^{n} f_k.\vec{e}_k$ et H est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Déterminer le noyau de H. Pouvait-on le prévoir sans expliciter H ?

II – Une propriété "extrémale" des fonctions de $\mathbb{S}$

1) Montrer que $\mathbb{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Indiquer sa dimension : il pourra être utile d'exhiber une application linéaire de $\mathbb{S}$ dans un certain $\mathbb{R}^p$.

2) À chaque fonction u de $\mathcal{C}^2[a, b]$ on associe le nombre $\Phi(u)$ défini par :

$$\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Les réels α, β étant donnés, G désigne la fonction de $\mathbb{S}$ déterminée à la partie précédente.

a) Montrer que, pour tout u de $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$, on a : $\Phi(u - G) = \Phi(u) - \Phi(G)$.

b) En déduire que : $\Phi(G) = \inf\limits_{u \in \mathbf{W}(f, \alpha, \beta)} \Phi(u)$.