Problème A : *polynômes de Legendre*

I – Interpolation de Lagrange

1) <u>*Unicité*</u> : si deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ conviennent, leur différence est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$ qui admet n racines distinctes (à savoir $x_1, \ldots, x_n$) : c'est donc le polynôme nul.

<u>*Existence*</u> : on vérifie aisément que

$$\boxed{g(X) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \frac{Q_j(X)}{Q_j(x_j)}}$$

convient.

2) a) Il vient, grâce à la linéarité de l'intégrale, d'après la question précédente,

$$J(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \quad \text{où} \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)}{Q(x_j)} \mathrm{d}t \text{ est un scalaire indépendant de } f.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\boxed{f \mapsto J(f) \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}).}$$

b) Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme g étudié au **1)** n'est autre que f (d'après l'unicité, puisqu'il est clair que f convient !), donc

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{ alors } J(f) = I(f).}$$

II – Choix des points d'interpolation

1) Remarquons tout d'abord que, lorsque f est un polynôme, le polynôme d'interpolation g qu'on lui associe comme dans la partie **I** n'est autre que le reste de la division euclidienne de f par P_n : en effet ce reste est de degré strictement inférieur à n et coïncide avec f en $x_1, \ldots, x_n$ (si $f = P_n Q + R$, alors, pour tout k, $f(x_k) = R(x_k)$, puisque x_k est racine de P_n).

- Pour montrer une première implication, je suppose que $J(f) = I(f)$ pour tout f de $\mathbb{R}_p[X]$; soit alors $Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X]$: P_n étant de degré n, $f = P_n Q$ est dans $\mathbb{R}_p[X]$, donc, par hypothèse,

$$J(f) = \int_{-1}^{1} P_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t.$$

Or, puisque f est multiple de P_n, le polynôme g associé à f pour le calcul de $J(f)$ est d'après la remarque précédente le polynôme nul : $J(f) = 0$, d'où finalement

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t = 0,$$

et cela pour tout Q dans $\mathbb{R}_{p-n}[X]$, ce qui prouve la première implication.

- Je suppose maintenant que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X] \quad \int_{-1}^{1} P_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

et je considère $f \in \mathbb{R}_p[X]$; la division euclidienne de f par P_n s'écrit $f = P_n Q + g$, où g est le polynôme associé à f comme dans la première partie. Donc

$$J(f) = I(g) = I(f) - I(P_n Q) = I(f) \text{ par hypothèse,}$$

et cela pour tout f de $\mathbb{R}_p[X]$, ce qui prouve finalement l'équivalence demandée.

- Enfin, si $p \geq 2n$, la propriété ne peut être vérifiée, puisque $Q = P_n \in \mathbb{R}_{p-n}[X]$, alors que

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P_n^2(t) \, \mathrm{d}t > 0,$$

car P_n^2 est une fonction continue, positive et non nulle.

Par contraposition, j'ai montré que :

$$\boxed{\text{Si la propriété est vérifiée, alors } p \leq 2n-1.}$$

2) Je montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : "il existe une unique famille $(L_0, \ldots, L_n)$ de polynômes tels que, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, L_k soit unitaire, de degré k, vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_i L_j = 0 \text{ "}$$

est vraie pour tout n, ce qui prouvera le résultat demandé.

- Il est clair que $\mathcal{P}_0$ est vraie, avec $L_0 = 1$.
- Je suppose, en guise d'hypothèse de récurrence, que $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie, pour un certain $n \geq 1$ et je cherche $(L_0, \ldots, L_n)$ vérifiant les conditions : nécessairement, $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est la famille fournie par l'hypothèse de récurrence, et L_n, qui doit être unitaire et de degré n, est nécessairement de la forme

$$L_n = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j L_j \text{ , avec } (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

(en effet, $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puisque c'est une famille libre (degrés échelonnés) de n vecteurs de cet espace de dimension n). Enfin, pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$, λ_k est caractérisé par la condition $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_k L_n = 0$, qui s'écrit, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\int_{-1}^{1} L_k X^n + \lambda_k \int_{-1}^{1} L_k^2 = 0.$$

$\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont ainsi entièrement déterminés et L_n, s'il existe, est donc unique.

Enfin le polynôme L_n défini ci-dessus, avec ces valeurs de $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$, est bien unitaire, de degré n, et j'ai bien :

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_i L_j = 0$$

(d'après l'hypothèse de récurrence pour $j < n$, grâce au choix des λ_k pour $j = n$).

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui achève la démonstration.

NB : le lecteur avisé aura reconnu l'algorithme de Gram-Schmidt.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; U_n est unitaire, de degré $2n$, donc $U_n^{(n)}$ est de degré n, de coefficient dominant

$$2n\,(2n-1)\ldots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Ainsi le polynôme $L_n^* = \frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}$ est unitaire, de degré n, cela étant vrai aussi pour $n = 0$. Compte tenu de l'unicité prouvée à la question précédente, il suffit maintenant de montrer que

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_i^* L_j^* = 0,$$

ou encore, à un coefficient multiplicatif près, que

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} U_i^{(i)} U_j^{(j)} = 0.$$

Soit donc $(i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2$, tel que $i < j$; j'effectue j intégrations par parties successives (en dérivant "du côté de U_i" et en intégrant "du côté de U_j") : tous les "crochets" sont nuls car -1 et 1 sont racines de $U_j^{(j-1)}, \ldots, U_j$ et il reste

$$\int_{-1}^{1} U_i^{(i)} U_j^{(j)} = (-1)^j \int_{-1}^{1} U_i^{(i+j)} U_j = 0$$

car $U_i^{(i+j)} = 0$, puisque $i + j > 2i$ alors que U_i est de degré $2i$.

Finalement la suite (L_n^*) est bien la suite (L_n) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad L_n = \frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; il est aisé, à l'aide du théorème de Rolle, de prouver par récurrence sur k que la propriété "$U_n^{(k)}$ admet -1 et 1 pour racines d'ordre $n-k$ et k racines distinctes dans $]-1,1[$" est vraie pour tout k dans $\{0,\ldots,n-1\}$. $U_n^{(n-1)}$ admet donc $2+n-1$, soit $n+1$ racines distinctes dans $[-1,1]$ qui y délimitent n intervalles où j'applique à nouveau le théorème de Rolle pour conclure :

$$\boxed{L_n \text{ admet } n \text{ racines distinctes dans }]-1,1[.}$$

Pour tout n, U_n est pair ; or le polynôme dérivé d'un polynôme pair (resp. impair) et impair (resp. pair). Il en résulte grâce à une récurrence immédiate :

$$\boxed{U_n \text{ est de la même parité que } n.}$$

4) Si l'on choisit $P_n = L_n$, $(L_0,\ldots,L_{n-1})$ étant, comme je l'ai déjà vu, une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, en combinant les relations

$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \int_{-1}^{1} L_i L_n = 0,$$

j'obtiens

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \int_{-1}^{1} Q L_n = 0.$$

Le résultat du **1**) s'applique alors, avec $p = 2n-1$:

$$\boxed{\text{Si } P_n = L_n, \text{ alors : } \forall f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \quad J(f) = I(f).}$$

III – Exemple : formule de Gauss à l'ordre 3

1) En développant $U_3 = \left(X^2-1\right)^3$ et en dérivant 3 fois, j'obtiens

$$\boxed{L_3 = X\left(X^2-\alpha^2\right) \text{ avec } \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}\ .}$$

2) En posant $x_1 = 0$, $x_2 = -\alpha$ et $x_3 = \alpha$, j'ai, en reprenant les notations du **I,** pour $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$,

$$J(f) = \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(-\alpha) + \lambda_3 f(\alpha),$$

avec

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(t+\alpha)(t-\alpha)}{\alpha.(-\alpha)}\mathrm{d}t\ ,\ \lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t-\alpha)}{(-\alpha)(-2\alpha)}\mathrm{d}t\ ,\ \lambda_3 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t+\alpha)}{\alpha.(2\alpha)}\mathrm{d}t\ ,$$

soit, tous calculs faits

$$\boxed{J(f) = \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9}\left[f(-\alpha) + f(\alpha)\right]\ .}$$

3) a) L'application Φ définie dans l'énoncé est clairement linéaire ; elle est injective car, si $P \in \operatorname{Ker}\Phi$, P est de degré au plus égal à 5 et admet $0,-\alpha,\alpha$ comme racines d'ordre au moins égal à 2 : P ne peut être que le polynôme nul. Enfin, $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^6$ sont tous deux de dimension 6, Φ est donc un isomorphisme : Φ est en particulier une bijection et donc

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } G \text{ de } \mathbb{R}_5[X] \text{ vérifiant } \Phi(G) = \left(f(0), f'(0), f(-\alpha), f'(-\alpha), f(\alpha), f'(\alpha)\right).}$$

b) D'après le choix de G, l'inégalité cherchée est triviale pour $x \in \{0,-\alpha,\alpha\}$.

Soient donc $x \in [-1,1] \setminus \{0,-\alpha,\alpha\}$ et φ la fonction auxiliaire définie dans l'énoncé. Le choix de A tel que $\varphi(x) = 0$ est possible grâce au fait que $L_3(x) \neq 0$. φ est de classe $\mathcal{C}^6$ sur $[-1,1]$ et s'annule en quatre points distincts de cet intervalle : $x, 0, -\alpha, \alpha$. En appliquant le théorème de Rolle sur les trois intervalles adjacents délimités par ces quatre points, j'obtiens trois points distincts (et différents de 0, de $-\alpha$ et de α) où φ' s'annule ; comme en outre φ' s'annule en $0, -\alpha$ et α, je dispose de six points distincts où φ' s'annule. En continuant alors à appliquer le théorème de Rolle, j'obtiens, pour $k = 6,5,4,3,2,1$, k points distincts où $\varphi^{(7-k)}$ s'annule. Finalement, $\varphi^{(6)}$ s'annule en un point c de $[-1,1]$, d'où, puisque $G^{(6)} = 0$ et $L_3^{(6)} = 720$,

$$f^{(6)}(c) - 720A = 0\ .$$

Il en résulte que $|A| \leq \dfrac{M_6}{720}$, or, puisque $\varphi(x) = 0$,

$$|f(x) - G(x)| \leq |A| \cdot [L_3(x)]^2 .$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1] \quad |f(x) - G(x)| \leq \frac{M_6}{720} \cdot [L_3(x)]^2.}$$

c) En intégrant $f - G$ de -1 à 1, compte tenu de

$$\int_{-1}^{1} L_3^2 = \frac{8}{175} ,$$

j'obtiens

$$|I(f) - I(G)| \leq \frac{M_6}{15\ 750}.$$

Or, grâce au choix de P_3, G étant de degré au plus égal à 5, j'ai $I(G) = J(G)$ et, d'après **2)**, $J(G) = J(f)$ puisque G et f coïncident en $0, -\alpha$ et α. Donc :

$$\boxed{|I(f) - J(f)| \leq \frac{M_6}{15\ 750}.}$$

Problème B : *splines cubiques*

I. Interpolation de f par une fonction de $\mathbb{S}$

1) a) Soit $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ et P le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$P(X) = a_0 (x_k - X)^3 + b_0 (X - x_{k-1})^3 + a_1 (x_k - X) + b_1 (X - x_{k-1}) .$$

Il apparaît que :

$$P(x_{k-1}) = a_0 h^3 + a_1 h \ ; \ P(x_k) = b_0 h^3 + b_1 h \ ; \ P''(x_{k-1}) = 6a_0 h \ ; \ P''(x_k) = 6b_0 h.$$

J'en déduis tout d'abord que la famille de 4 polynômes

$$\mathcal{B} = \Big((x_k - X)^3 , (X - x_{k-1})^3 , (x_k - X) , (X - x_{k-1}) \Big)$$

est libre (si une combinaison linéaire telle que P est le polynôme nul, j'en déduis $a_0 = b_0 = 0$, car $P'' = 0$, puis $a_1 = b_1 = 0$, car $P = 0$!).

C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$, qui est de dimension 4.

Je résous maintenant la question par analyse–synthèse :

∗ Analyse : si un polynôme P vérifie les condition de l'énoncé, ses coordonnées (a_0, a_1, b_0, b_1) dans $\mathcal{B}$ vérifient nécessairement

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h} \ ; \ b_0 = \frac{m_k}{6h} \ ; \ a_1 = \frac{1}{h}\left(f_{k-1} - \frac{m_{k-1}}{6h} h^3\right) \ ; \ b_1 = \frac{1}{h}\left(f_k - \frac{m_k}{6h} h^3\right)$$

∗ Synthèse : soit P le polynôme dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont :

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h} \ ; \ a_1 = \frac{f_{k-1}}{h} - \frac{h m_{k-1}}{6} \ ; \ b_0 = \frac{m_k}{6h} \ ; \ b_1 = \frac{f_k}{h} - \frac{h m_k}{6}$$

D'après la remarque préliminaire, P est bien solution et c'est la seule d'après l'analyse :

Il existe un unique polynôme P_k vérifiant les conditions de l'énoncé et

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h} \ ; \ a_1 = \frac{f_{k-1}}{h} - \frac{h m_{k-1}}{6} \ ; \ b_0 = \frac{m_k}{6h} \ ; \ b_1 = \frac{f_k}{h} - \frac{h m_k}{6}.$$

b) Le seul problème potentiel dans la définition de g serait une "double définition" en x_k, pour $k = 1, \ldots, n-1$, puisque x_k appartient à $[x_{k-1}, x_k]$, où g coïncide avec P_k, et à $[x_k, x_{k+1}]$, où g coïncide avec P_{k+1} ; mais, par construction :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f_k .$$

Par conséquent,

$$\boxed{g \text{ est bien définie.}}$$

Plus précisément, g est même continue sur $[a,b]$. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les $]x_{k-1},x_k[$, il reste à examiner la régularité des raccordements aux points x_k, pour $k=1,\ldots,n-1$.

D'après la question précédente, en gardant les mêmes notations, j'ai pour tout k de $[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P_k'(x_{k-1}) &= -3a_0h^2-a_1+b_1=\cdots=-\frac{h}{3}m_{k-1}-\frac{h}{6}m_k+\frac{1}{h}(f_k-f_{k-1}) \\ P_k'(x_k) &= 3b_0h^2-a_1+b_1=\cdots=\frac{h}{6}m_{k-1}+\frac{h}{3}m_k+\frac{1}{h}(f_k-f_{k-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, g admet des dérivées à gauche et à droite en chaque x_k, pour $k=1,\ldots,n-1$, avec :

$$g_g'(x_k)=P_k'(x_k)=\frac{h}{6}m_{k-1}+\frac{h}{3}m_k+\frac{1}{h}(f_k-f_{k-1})$$

d'après la deuxième relation ci-dessus, et

$$g_d'(x_k)=P_{k+1}'(x_k)=-\frac{h}{3}m_k-\frac{h}{6}m_{k+1}+\frac{1}{h}(f_{k+1}-f_k)$$

d'après la première relation où j'ai remplacé k par $k+1$ (attention aux notations $a_0,\ldots$ qui dépendent de k !).

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ si et seulement si $g_g'(x_k)=g_d'(x_k)$ pour tout k de $[\![1,n-1]\!]$ (pas de problème aux extrémités !), soit si et seulement si :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!]\quad m_{k-1}+4m_k+m_{k+1}=\frac{6}{h^2}(f_{k-1}-2f_k+f_{k+1})\ \text{(égalité notée } (L_k)\text{)}.$$

Cette condition est donc *a fortiori* nécessaire pour que g soit de classe $\mathcal{C}^2$! Il se trouve qu'elle est aussi suffisante puisque, dès que g est $\mathcal{C}^1$, ses dérivées secondes à gauche et à droite en chaque x_k, pour $k=1,\ldots,n-1$, sont égales à m_k, d'après les conditions imposées aux P_k ; g est alors de classe $\mathcal{C}^2$ et finalement :

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [a,b] \text{ si et seulement si } (L_k) \text{ est vérifiée pour } k=1,\ldots,n-1.}$$

c) D'après les calculs de la question précédente,

$$g'(a)=P_1'(x_0)=-\frac{h}{3}m_0-\frac{h}{6}m_1+\frac{1}{h}(f_1-f_0)\quad\text{et}\quad g'(b)=P_n'(x_n)=\frac{h}{6}m_{n-1}+\frac{h}{3}m_n+\frac{1}{h}(f_n-f_{n-1})$$

donc

$$g'(a)=\alpha\Leftrightarrow 2m_0+m_1=b_0\quad\text{où}\quad b_0=\frac{6}{h^2}(f_1-f_0-h\alpha)$$

et

$$g'(b)=\beta\Leftrightarrow m_{n-1}+2m_n=b_n\quad\text{où}\quad b_n=-\frac{6}{h^2}(f_n-f_{n-1}-h\beta)$$

Ainsi, en notant pour $k=1,\ldots,n-1$:

$$b_k=\frac{6}{h^2}(f_{k-1}-2f_k+f_{k+1})$$

le second membre de l'égalité (L_k), une CNS pour que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et vérifie $g'(a)=\alpha,\ g'(b)=\beta$, est que le vecteur $\vec{m}$ soit solution du système linéaire :

$$\boxed{(S)\quad A\cdot\vec{m}=\vec{b},\quad\text{où}\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & (0) \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ (0) & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est tridiagonale symétrique.}}$$

2) a) Je calcule, avec une petite réindexation :

$$\begin{aligned}
\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle &= (2v_0+v_1)\,v_0+\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k-1}+4v_k+v_{k+1})\,v_k+(v_{n-1}+2v_n)\,v_n\\
&= 2v_0^2+4\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2+2v_n^2+v_0v_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_kv_{k+1}+\sum_{k=1}^{n-1}v_{k-1}v_k+v_{n-1}v_n\\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{n-1}v_k^2+\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)+2\sum_{k=1}^{n}v_{k-1}v_k\\
&= \langle\vec{v},\vec{v}\rangle+\sum_{k=1}^{n}(v_{k-1}+v_k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle\geq\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ et une condition nécessaire pour avoir l'égalité est que les v_k, $k\in[\![1,n-1]\!]$ soient tous nuls, autrement dit $\vec{v}\in\mathrm{Vect}\,(\vec{e}_0,\vec{e}_n)$. Or, si $\vec{v}=v_0\vec{e}_0+v_n\vec{e}_n$, j'ai

$$\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle=2\left(v_0^2+v_n^2\right)\quad\text{et}\quad\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=v_0^2+v_n^2$$

donc :

$$\boxed{\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle\geq\langle\vec{v},\vec{v}\rangle\text{ avec égalité si et seulement si }\vec{v}=0.}$$

b) Soit $f=\mathrm{Can}\,A$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique ; la minoration précédente montre que $f(\vec{v})=0\Rightarrow\vec{v}=0$, ainsi f est injective, donc bijective puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Autrement dit :

$$\boxed{A\text{ est inversible.}}$$

c) *Analyse* : si G existe, je note P_k le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ coïncidant avec G sur $]x_{k-1},x_k[$ (fourni par **P4)**) ; d'après **P1), P2), P3)** et le **1)c)**, les $m_k=G''(x_k)$ vérifient nécessairement le système (S), avec le vecteur $\vec{b}$ défini ci-dessus ; comme ce système admet une solution unique (il est de Cramer d'après **b)**), les m_k, donc les P_k, donc G sont entièrement déterminés.

Synthèse : soit G la fonction coïncidant sur $]x_{k-1},x_k[$ avec le polynôme P_k défini au **1)**, en prenant pour valeurs m_k la solution de (S) ; G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ (d'après **1)c)**) et vérifie **P2), P3), P4)** par construction, donc G est bien solution, or c'est la seule possible d'après l'analyse :

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction }G\text{ de }\mathbf{W}(f,\alpha,\beta)\text{ qui soit dans }\mathbb{S}.}$$

3) On suppose ici $\alpha=\beta=0$. Alors, d'après les relations obtenues aux questions **1)b)** et **1)c)**,

$$\boxed{\vec{b}=H\cdot\vec{f},\quad\text{où}\quad H=\frac{6}{h^2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&&&(0)\\1&-2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-2&1\\(0)&&&1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).}$$

Le vecteur $\vec{x}=\sum_{k=0}^{n}x_k\vec{e}_k$ appartient au noyau de H si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{cl}-x_1+x_2&=0\\x_1-2x_2+x_3&=0\\\vdots&\vdots\\x_{n-2}-2x_{n-1}+x_n&=0\\x_{n-1}-x_n&=0\end{array}\right.$$

Grâce aux opérations élémentaires successives $L_k\leftarrow L_k+L_{k-1}$, pour $k=2,\ldots,n-1$, je constate que ce système équivaut à

$$x_1=x_2=\cdots=x_n,$$

ainsi

$$\boxed{\text{Le noyau de }H\text{ est la droite }\mathrm{Vect}\,(1,\ldots,1).}$$

On pouvait effectivement prévoir ce résultat : les vecteurs $\vec{f}$ du noyau de H sont ceux pour lesquels le vecteur $\vec{b}$ est nul, autrement dit pour lesquels le vecteur $\vec{m}$ est nul (puisque A est inversible) ; j'en déduis que :

- si $\vec{f}$ appartient au noyau de H, alors les m_k sont nuls, donc la fonction G est affine (car affine par morceaux et de classe $\mathcal{C}^2$) ; mais comme $G'(a) = \alpha = 0$ par hypothèse, c'est que G est constante et donc tous les f_k sont égaux ;
- réciproquement, si tous les f_k sont égaux, la fonction G constante (égale à la valeur commune des f_k) est solution, c'est donc **la** solution (on a montré son unicité), avec des m_k tous nuls donc $\vec{b}$ nul, d'où $\vec{f}$ élément du noyau de H.

II. Une propriété "extrémale" des fonctions de $\mathbb{S}$

1) $\mathbb{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2[a,b]$: $\mathbb{S}$ est par définition une partie de $\mathcal{C}^2[a,b]$, non vide (j'ai déjà signalé que $0 \in \mathbb{S}$!) et stable par combinaisons linéaires (clair au vu de **P4)**, puisque $\mathbb{R}_3[X]$ est lui-même stable par combinaisons linéaires). Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{S} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Soit ϕ l'application de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}^{n+3}$, qui à toute fonction g de $\mathbb{S}$ associe $(g(x_0), \ldots, g(x_n), g'(a), g'(b))$. ϕ est linéaire (banal) et nous avons montré au **I.** que tout élément $(f_0, \ldots, f_n, \alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^{n+3}$ admet un antécédent unique dans $\mathbb{S}$; autrement dit, ϕ est une bijection ! Finalement ϕ est un isomorphisme et il en résulte :

$$\boxed{\dim \mathbb{S} = n+3.}$$

2) **a)** Soient α, β réels, u dans $\mathbf{W}(f,\alpha,\beta)$ et G la fonction de $\mathbb{S}$ déterminée à la partie **I**. Après simplification :

$$\Phi(u-G) - [\Phi(u) - \Phi(G)] = \int_a^b \left(2G''^2 - 2u''G''\right) = 2\int_a^b G'' \cdot \left(G'' - u''\right).$$

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, j'intègre par parties sur $[x_{k-1}, x_k]$ (en notant encore, pour simplifier, G et u les polynômes coïncidant avec G et u sur $[x_{k-1}, x_k]$, polynômes bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_{k-1}, x_k]$) :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} G'' \cdot \left(G'' - u''\right) = \left[G'' \cdot \left(G' - u'\right)\right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(3)} \cdot \left(G' - u'\right)$$

et, en intégrant à nouveau par parties

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(3)} \cdot \left(G' - u'\right) = \left[G^{(3)} \cdot (G-u)\right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(4)} \cdot (G-u) = 0.$$

Le crochet est nul, puisque G et u coïncident en x_{k-1} et x_k (car elles coïncident avec f) ; la dernière intégrale est nulle, puisque $G^{(4)} = 0$ (dérivée d'ordre 4 d'un polynôme de degré au plus 3). En sommant, j'obtiens alors grâce à la relation de Chasles :

$$\int_a^b G'' \cdot \left(G'' - u''\right) = \left[G'' \cdot \left(G' - u'\right)\right]_a^b = 0$$

puisque G' et u' coïncident en a et en b (valant α et β). En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } u \text{ de } \mathbf{W}(f,\alpha,\beta), \text{ on a : } \Phi(u-G) = \Phi(u) - \Phi(G).}$$

b) Puisque Φ est à valeurs positives, le résultat précédent montre que :

$$\forall u \in \mathbf{W}(f,\alpha,\beta) \quad \Phi(u) - \Phi(G) \geq 0$$

donc, comme G elle-même est dans $\mathbf{W}(f,\alpha,\beta)$:

$$\boxed{\Phi(G) = \inf_{u \in \mathbf{W}(f,\alpha,\beta)} \Phi(u).}$$

Il s'agit en fait d'un plus petit élément, on pourrait écrire min au lieu de inf !