Chapitre 7

Dérivation et intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Dans ce chapitre, sauf indication contraire, $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Sauf précision, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les parties I, II, III et VI rassemblent des rappels de certains résultats fondamentaux de dérivation et d'intégration du cours de première année. La partie IV étend à une classe plus générale de fonctions l'intégration des fonctions continues sur un segment, étudiée en première année. La partie V rappelle et/ou généralise un certain nombre de méthodes de calculs d'intégrales.

I. Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration – Si f est constante, le résultat est vrai et tout élément c de $]a,b[$ convient. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Si f n'est pas constante, et si par exemple elle prend une valeur strictement supérieure à $f(a)$, alors elle atteint un maximum en un point noté $c \in]a,b[$. Alors, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant f(c)$ et donc, pour $t \in [a,c[$,

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geqslant 0.$$

Lorsque $t \to c^-$, on en déduit que $f'(c) \geqslant 0$. De même, pour $t \in]c,b]$,

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leqslant 0.$$

Lorsque $t \to c^+$, on en déduit que $f'(c) \leqslant 0$, d'où finalement $f'(c) = 0$. On procède de même si f prend une valeur strictement inférieure à $f(a)$, en considérant le minimum de f. $\square$

Théorème – Égalité des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration – Soit
$$g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$
Alors g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ de même que f, et $g(a) = g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, *i.e.*,
$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$
On en déduit le résultat. $\square$

Contre-exemple – Le résultat du théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis sont faux en général si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, ou à valeurs vectorielles : par exemple, la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array} \right.$$
est continue et dérivable sur $[0,2\pi]$, et $f(0) = 1 = f(2\pi)$. Pourtant, pour tout $t \in [0,2\pi]$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Théorème – Inégalité des accroissements finis, cas réel

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que pour tout $t \in I$,
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
Alors f est M-Lipschitzienne sur I : pour tout $(x,y) \in I^2$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration – Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. La fonction f est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$, donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que
$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x).$$
Alors
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leqslant M|x-y|$$
d'après l'hypothèse sur f'. On procède de même si $x > y$ en raisonnant sur $[y,x]$, et le résultat est évident si $x = y$. $\square$

Corollaire – Dérivation et fonctions constantes

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. On rappelle que I est un **intervalle**.
Pour que f soit constante sur I, il faut et il suffit que $f' = 0$.

Démonstration – Il est évident que pour que f soit constante, il faut et il suffit que les parties réelle et imaginaire de f (qui sont à valeurs réelles) soient constantes. Or, ces deux fonctions sont dérivables sur I, et on a $f' = \mathcal{R}e(f)' + i\,\mathcal{I}m(f)'$. Il suffit donc de prouver le résultat pour une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Or, pour une telle fonction, si g' est nulle, alors d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in I^2$,
$$|g(x) - g(y)| \leqslant 0\,(x-y) = 0,$$
et donc $g(x) = g(y)$. Ceci est vrai pour tout $(x,y) \in I^2$, donc g est constante. La réciproque est évidente : une fonction constante a une dérivée nulle. $\square$

Théorème – Dérivation et monotonie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

• f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.

• Si $f' \geqslant 0$ sur I et si les zéros de f' sont en nombre fini, ou forment une suite, alors f est strictement croissante sur I.

Démonstration

• Si f est croissante, alors pour tout $a \in I$ et $x \in I$ distinct de a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

Lorsque $x \to a$, on obtient $f'(a) \geqslant 0$.

Réciproquement, si $f' \geqslant 0$, alors pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. On en déduit que $x - y$ et $f(x) - f(y)$ sont de même signe : f est croissante.

• On sait d'après le premier point que f est croissante. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait a et b dans I tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Alors f est nécessairement constante sur $[a,b]$, et donc pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) = 0$. Ceci est impossible car les zéros de f' sont en nombre fini ou forment une suite. $\square$

Théorème – Limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, telle que f' admet une limite ℓ en a (éventuellement infinie lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell.$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{K}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration

• **Premier cas :** $\ell \in \mathbb{K}$. D'après la caractérisation de la limite et de la dérivabilité à l'aide des parties réelle et imaginaire, on se ramène en fait à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Définissons sur I la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - f(a) - \ell(x-a).$$

La fonction g est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$g'(x) = f'(x) - \ell.$$

Par hypothèse, g' a donc pour limite 0 en a. Fixons $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in (I \setminus \{a\}) \cap [a-\eta, a+\eta]$, $|g'(t)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in (I \setminus \{a\}) \cap [a-\eta, a+\eta]$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c strictement compris entre a et x, tel que $g(x)-g(a) = g'(c)(x-a)$, et alors on a $|g'(c)| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$|g(x) - g(a)| \leqslant \varepsilon(x-a),$$

puis

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)-\ell(x-a)}{x-a}\right| = \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell,$$

f est donc dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

• **Deuxième cas :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **et** $\ell = \pm\infty$. On adapte la démonstration précédente avec $g = f$ et en traduisant les limites infinies (il est indispensable alors de raisonner avec *l'égalité* des accroissements finis, afin de pouvoir minorer la valeur absolue du taux d'accroissement, et non pas avec l'inégalité). □

Remarques

• Ce théorème ne permet pas de prolonger par continuité la fonction f' sur I : une fois la fonction f définie sur I, si $a \in I$, l'éventuelle dérivabilité de f en a est fixée. Si f est dérivable en a, ce théorème est l'un des moyens de le prouver, mais ce que l'on prouve est que $f'(a)$ *est défini.*

• Une fonction f peut être dérivable sur I sans que f' ait pour limite $f'(a)$ en tout point $a \in I$. Par exemple, la fonction

$$f : \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$$

prolongée par continuité en 0 avec $f(0) = 0$, est dérivable à droite en 0 car

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction f est également dérivable sur $]0,1]$ (par produit et composition) et pour tout $x \in]0,1]$,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le premier terme tend vers 0, mais le second n'a pas de limite lorsque $x \to 0^+$, donc f' n'a pas de limite en 0.

Il y a donc une différence importante entre la dérivabilité et la classe $\mathcal{C}^1$.

II. Dérivées d'une bijection réciproque

Dans cette partie, les fonctions sont à valeurs réelles. Rappelons, sans démonstration, le résultat suivant de première année :

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

Concernant la dérivabilité, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I.
Soit $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration – Notons $b = f(a)$. Pour y dans $f(I)$ avec $y \neq b$, on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))},$$

que l'on peut voir comme un quotient de la forme

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

avec $x = f^{-1}(y)$. Or, lorsque $y \to b$, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$ par continuité de f^{-1} ; f étant dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, on a

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)}$$

et donc, par composition de limites,

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} \underset{y\to b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)}.$$

On en déduit que f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit de signe constant sur I (sans annulation).
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration – La fonction f est dérivable sur I et f' est de signe constant sur I, donc f est strictement monotone sur I et le théorème précédent s'applique. On sait notamment que pour tout $b \in f(I)$, en notant $a = f^{-1}(b)$, on a

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))},$$

d'où la formule annoncée. □

Enfin, on peut généraliser ces résultats à la classe $\mathcal{C}^k$:

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) telle que f' ne s'annule pas.
Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $f(I)$.

Démonstration – Tout d'abord, f' est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, donc f' est de signe constant sur I et le corollaire précédent s'applique. Pour la classe $\mathcal{C}^k$, on raisonne par récurrence : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, f' est continue sur I, donc d'après la formule ci-dessus et par composition, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $f(I)$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, et si le résultat est vrai à l'ordre k, alors $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $f(I)$ comme inverse d'une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant pas. Donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $f(I)$. □

Exemple – La fonction tangente réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur son image $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On sait alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

III. Intégration sur un segment des fonctions continues : quelques rappels

1. Primitives, intégrale fonction de ses bornes

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
On dit que g est une **primitive** de f sur I si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g' = f$.

Propriété

Soient g et h deux primitives d'une fonction f continue sur un **intervalle** I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) = h(x) + k$.

Démonstration – La fonction $g - h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $(g - h)' = 0$, donc $g - h$ est constante sur l'intervalle I. $\square$

On sait donc qu'il existe au plus une primitive de f sur I prenant en un point donné une valeur donnée. On se pose maintenant la question de l'existence. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$. On peut alors définir la fonction

$$F_a : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
• Soit $a \in I$. La fonction F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
• Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{K}$. Il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur b en a. Il s'agit de la fonction $x \mapsto F_a(x) + b$.
• Si g est une primitive de f sur I, alors pour tout segment $[a,b]$ de I, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a), \text{ noté } [g(t)]_a^b.$$

Démonstration
• Soit $c \in I$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Par continuité de f en c, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap [c - \eta, c + \eta]$, $|f(t) - f(c)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in I \cap [c - \eta, c + \eta]$. Alors, pour tout t compris entre c et x, $|f(t) - f(c)| \leqslant \varepsilon$. On évalue alors

$$|F_a(x) - F_a(c) - (x - c)f(c)| = \left|\int_c^x [f(t) - f(c)]\,dt\right| \leqslant \left|\int_c^x |f(t) - f(c)|\,dt\right| \leqslant \varepsilon\,|x - c|.$$

Si de plus $x \neq c$, on a donc

$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(c)}{x - c} - f(c)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que F_a est dérivable en c avec $F_a'(c) = f(c)$, et ce pour tout $c \in I$. De plus, la fonction f étant continue, F_a est de classe $\mathcal{C}^1$: F_a est donc une primitive de f sur I. Elle s'annule en a, et on a déjà prouvé qu'il y a unicité d'une telle fonction.
• C'est maintenant immédiat : cette fonction convient, et on sait qu'il y a unicité.

• Soit g une primitive de f sur I et $[a,b]$ un segment de I. D'après le point précédent, $g = F_a + g(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = g(b) - g(a). \qquad \square$$

Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Démonstration – La fonction f est une primitive de la fonction continue f'. Le résultat vient donc du troisième point du théorème précédent (y compris si $b \leqslant a$, car dans ce cas on se ramène au cas précédent quitte à considérer $-f$). $\square$

En application de ce résultat, on montre facilement l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes :

Théorème – Inégalité des accroissements finis, cas complexe

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que pour tout $t \in I$,

$$|f'(t)| \leqslant M.$$

Alors f est M-Lipschitzienne sur I : pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|.$$

Démonstration – Soient x et y dans I tels que $x < y$; f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,y]$, donc on peut écrire, d'après le corollaire précédent,

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)\,dt \right|.$$

Sachant que $|f'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [x,y]$, on a aussi

$$\left| \int_x^y f'(t)\,dt \right| \leqslant \int_x^y |f'(t)|\,dt \leqslant M\,(y - x).$$

On en déduit le résultat. On procède de même si $x > y$ en raisonnant sur $[y,x]$, et le résultat est évident si $x = y$.

Remarques

• Bien sûr, ce théorème s'applique aussi au cas réel : ses hypothèses sont plus fortes que l'inégalité donnée dans le cas réel.

• En revanche, la démonstration du théorème dans le cas réel ne peut pas être adaptée au cas complexe : elle repose sur l'égalité des accroissements finis, et donc sur le théorème de Rolle, dont le résultat est faux en général pour les fonctions à valeurs complexes. Cela explique les hypothèses plus fortes données dans le théorème ci-dessus.

2. Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Ces quantités sont appelées **sommes de Riemann** associées à f sur $[a,b]$. On a alors :

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$

On notera, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = a + k\,\frac{b-a}{n};$$

ainsi $(a_0,\dots,a_n)$ est la subdivision régulière de $[a,b]$ à $n+1$ points (*i.e.*, $a_{k+1} - a_k$ est constant égal à $(b-a)/n$).

La fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée par une certaine constante $M \geqslant 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est M-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, d'après la relation de Chasles notamment, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(a_k))\,dx\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|\,dx.\end{aligned}$$

Or f est M-Lipschitzienne sur $[a,b]$, donc pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, pour tout $x \in [a_k,a_{k+1}]$,

$$|f(x) - f(a_k)| \leqslant M\,|x - a_k| = M\,(x - a_k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| &\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x - a_k)\,dx \\ &= M\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(x-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} \\ &= M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = M\,n\,\frac{(b-a)^2}{2n^2} = M\,\frac{(b-a)^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$ □

Remarque – Les sommes de Riemann correspondent à un cas particulier de l'approximation numérique de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode des rectangles.

Exemple – Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$. En réécrivant

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}},$$

on voit que les x_n sont les sommes de Riemann associées à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, on sait donc que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2).$$

IV. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

1. Définitions

Définition – Fonction continue par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(a_0, \dots ,a_p)$ $(p \geqslant 1)$ de $[a,b]$ telle que :

- $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$.
- Pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, $f_{|\,]a_i,a_{i+1}[}$ est la restriction à $]a_i,a_{i+1}[$ d'une fonction continue sur $[a_i,a_{i+1}]$.

Le $(p+1)$-uplet $(a_0, \dots ,a_p)$ est appelé **subdivision** de $[a,b]$ subordonnée (ou adaptée) à f. Il n'est pas unique.

Si f est définie sur un intervalle I, on dit que f est continue par morceaux si sa restriction à tout segment de I est une fonction continue par morceaux.

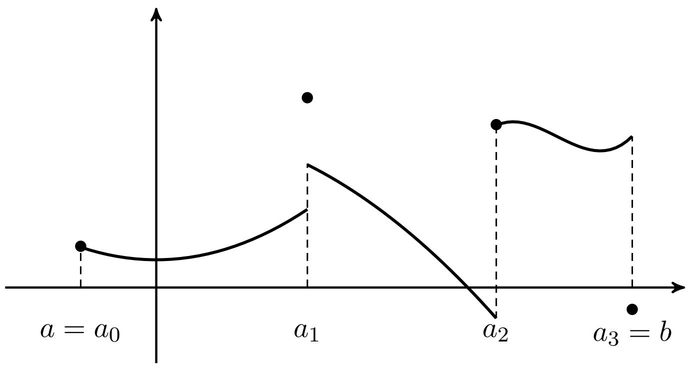
Remarque – Le réel

$$\max_{i \in [\![0,p-1]\!]} (a_{i+1} - a_i)$$

est appelé **pas** de cette subdivision. Il est strictement positif, c'est le plus grand écart entre deux éléments consécutifs de la subdivision.

On dit que la subdivision est **régulière** si l'écart $a_{k+1} - a_k$, pour $k \in [\![0,p-1]\!]$, est constant.

Voici un exemple de graphe d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les points épais permettent de repérer la valeur prise par la fonction aux points de discontinuité.



Exemples

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

• La fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$: f n'a pas de limite finie à droite en 0.

• La fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = \begin{cases} x\,\lfloor 1/x \rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$: elle a une infinité de points de discontinuité dans $]0,1]$. En revanche, elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques

• La deuxième condition de la définition équivaut à chacune des propriétés suivantes :

— Pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité sur le segment $[a_i,a_{i+1}]$.

— Pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, f est continue sur $]a_i,a_{i+1}[$, f possède une limite finie à droite en a_i, et une limite finie à gauche en a_{i+1}.

• Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

• Les limites de f en a_i ne sont pas nécessairement égales à $f(a_i)$; f peut être discontinue en chaque point a_i.

• Avec les notations précédentes, si f est continue en un certain $a_{i_0} \in]a,b[$, alors on peut enlever a_{i_0} de la subdivision $(a_0,\ldots,a_p)$ pour obtenir une subdivision de $[a,b]$ encore adaptée à f. En faisant cela pour tous les points de la subdivision qui appartiennent à $]a,b[$ et qui sont des points de continuité de f, on construit une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f dont les points sont a, b, et les points de discontinuité de f dans $]a,b[$. Une telle subdivision est unique, elle est, en un certain sens, minimale.

Propriété

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration – La fonction nulle est évidemment continue par morceaux. Si f est continue par morceaux sur I, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors toute subdivision adaptée à f d'un segment de I est aussi adaptée à λf, qui est ainsi continue par morceaux sur I. Enfin, soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, et soit $[a,b]$ un segment de I. On se donne une subdivision $(a_0,\ldots,a_p)$ de $[a,b]$ adaptée à f, une subdivision $(b_0,\ldots,b_m)$ de $[a,b]$ adaptée à g. On construit alors une subdivision adaptée à la fois à f et g en plaçant les nombres $a_0,\ldots,a_p, b_0,\ldots,b_m$ par ordre croissant, et en enlevant les répétitions. On en déduit que $f+g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, cette nouvelle subdivision de $[a,b]$ étant adaptée à $f+g$. Ceci est valable pour tout segment de I, donc $f+g$ est continue par morceaux sur I. Finalement, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. $\square$

On admettra que l'on peut adapter la construction de l'intégrale sur un segment, faite en première année pour les fonctions continues, au cadre des fonctions continues par morceaux. Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux, son intégrale est toujours notée

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Si f est continue par morceaux sur I, elle est continue par morceaux sur tout segment de I, et donc on peut définir son intégrale sur tout segment de I.

2. Propriétés de l'intégrale

Les propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment se généralisent aux fonctions continues par morceaux. Nous donnons ici, souvent sans démonstration, ces propriétés.

Propriété – Linéarité de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors
$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Propriété – Relation de Chasles

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $c \in [a,b]$.
Alors, les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont continues par morceaux et
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propriété – Positivité et croissance de l'intégrale

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux à valeurs réelles positives. Alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
- Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Propriété

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
Alors la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est continue par morceaux et
$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Remarque – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \|f\|_\infty\,dx = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Le vecteur $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$. L'inégalité précédente, qu'il faut absolument savoir redémontrer pour majorer des intégrales, est appelée inégalité de la moyenne.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui coïncident sauf en un nombre fini de points. Alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

En particulier, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux f n'est pas modifiée si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points.

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue** à valeurs réelles **positives**.

Alors pour que f soit nulle, il faut et il suffit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Démonstration – Bien sûr, si f est nulle, son intégrale est nulle. Réciproquement, raisonnons par contraposée : si f n'est pas identiquement nulle, alors par continuité de f, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) > 0$, et il existe $\eta > 0$ tel que $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$ et pour tout $x \in [c-\eta, c+\eta]$, $|f(x) - f(c)| \leqslant \frac{1}{2}f(c)$, et en particulier $f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(c)$. Alors, d'après la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f \geqslant 2\eta\,\frac{1}{2}f(c) = \eta f(c) > 0,$$

d'où le résultat. □

Remarque – Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, positive, on en déduit en raisonnant sur chaque morceau que, pour que $\int_a^b f$ soit nulle, il faut et il suffit que f soit nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points.

3. Le cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Lorsque f est continue par morceaux sur I, si $(a,b) \in I^2$ avec $a = b$ ou $a > b$, on donne également un sens à $\int_a^b f(x)\,dx$ en posant respectivement

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

La relation de Chasles reste valide, ainsi que la propriété de linéarité de l'intégrale. En revanche, dès que des inégalités entrent en jeu, il faut être vigilant sur l'ordre des bornes. Par exemple, la majoration du module de l'intégrale prend la forme

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Pour toute constante k telle que $|f(x)| \leqslant k$ pour tout x compris entre a et b, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant k\,|b-a|\,.$$

V. Méthodes de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Théorème – Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $(a,b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Démonstration – La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I donc

$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b [fg]'(t)\,dt = \int_a^b [f'(t)g(t) + f(t)g'(t)]\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt,$$

par linéarité de l'intégrale. □

2. Changement de variable

Théorème – Changement de variable (cas continu)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[c,d]$ à valeurs dans I. Alors

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

Remarques

- On dira souvent « on pose $x = \phi(t)$ ». On comprend alors bien la formule en écrivant $dx = \phi'(t)\,dt$, même si le sens à donner à cette égalité n'est pas évident.
- En revanche, dire « on pose $x = \phi(t)$ » ne suffit pas, il y a des hypothèses à vérifier.

Démonstration du théorème – Soit F une primitive de f sur I (une telle primitive existe car f est continue sur I). La fonction $F \circ \phi$ est une primitive sur $[c,d]$ de la fonction continue $(f \circ \phi) \times \phi'$, donc

$$\int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = [F(\phi(t))]_c^d = [F(x)]_{\phi(c)}^{\phi(d)} = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Assez souvent, on souhaite faire un changement de variable pour une fonction f continue par morceaux. On peut donner un théorème de changement de variable dans ce cas :

Théorème – Changement de variable (cas continu par morceaux)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, et soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[c,d]$ à valeurs dans I, **strictement monotone**. Alors

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

Démonstration – On traite le cas où ϕ est strictement croissante, l'autre cas étant similaire. Soit $(b_0,\dots,b_p)$ $(p \geqslant 1)$ une subdivision de $[\phi(c),\phi(d)]$ adaptée à la restriction de f à $[\phi(c),\phi(d)]$, et soit $(a_0,\dots,a_p)$ la subdivision de $[c,d]$ telle que pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, $\phi(a_i) = b_i$ (a_i existe et est unique car ϕ est une bijection de $[c,d]$ sur $[\phi(c),\phi(d)]$, par continuité et stricte monotonie). Alors d'après la relation de Chasles,

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{b_i}^{b_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{b_i}^{b_{i+1}} f_i(x)\,dx,$$

où f_i désigne le prolongement de $f_{|\,]b_i,b_{i+1}[}$ en une fonction continue sur $[b_i,b_{i+1}]$. La dernière égalité vient du fait que, sur $[b_i,b_{i+1}]$, les fonctions f et f_i diffèrent seulement éventuellement en b_i et b_{i+1}. Alors, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, d'après le théorème précédent (que l'on peut appliquer car f_i est continue sur $[b_i,b_{i+1}]$ pour tout i), on a

$$\int_{b_i}^{b_{i+1}} f_i(x)\,dx = \int_{\phi(a_i)}^{\phi(a_{i+1})} f_i(x)\,dx = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

Finalement

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt. \quad \square$$

Remarque – Dans la démonstration, on voit l'utilité de l'hypothèse de stricte monotonie de ϕ. Pour faire la simplification

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt,$$

on utilise le fait que les fonctions $f_i \circ \phi$ et $f \circ \phi$ coïncident sur $[a_i,a_{i+1}]$, sauf peut-être aux points t de $[a_i,a_{i+1}]$ tels que $\phi(t)$ est l'un des b_j, car dans ce cas $\phi(t)$ est un point d'éventuelle discontinuité de f. Or, les seuls points vérifiant cette condition sont a_i et a_{i+1}, d'après notre hypothèse sur ϕ. Sans cette hypothèse, la fonction $f \circ \phi$ pourrait même ne pas être continue par morceaux.

VI. Formules de Taylor

Théorème – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors pour tout $(a,x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration – On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat à montrer s'écrit

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

ce qui est vrai d'après un théorème donné plus haut, f étant de classe $\mathcal{C}^1$.

Supposons le résultat vrai pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. On raisonne dans le cas où $a < x$, les autres cas étant similaires. L'hypothèse de récurrence pour la fonction f s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Or $t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $f^{(n+1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,x]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+2)}(t)\,dt,\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque – Pour exploiter cette formule, il est souvent utile de savoir majorer le reste intégral. Sous les hypothèses précédentes, on a pour tout $(a,x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Or, f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,x]$ (ou $[x,a]$), elle est donc bornée sur ce segment (car ses parties réelle et imaginaire le sont), par une certaine constante M. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| &\leqslant \left|\int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,|f^{(n+1)}(t)|\,dt\right| \\ &\leqslant M\left|\int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,dt\right| \\ &\leqslant M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

L'avantage de la formule de Taylor avec reste intégral est d'être explicite et globale : elle donne une information pour tout x de I. Lorsque x est proche de a, on peut donner une estimation de $f(x)$ sous forme de développement limité. Commençons par rappeler le résultat suivant :

Théorème – Primitivation d'un développement limité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On suppose que f possède un développement limité à l'ordre n en $a \in I$, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
Alors toute primitive g de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a, avec

$$g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration – Il suffit de prouver cette formule pour la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ vérifiant $F_a(a) = 0$, toutes les autres primitives de f s'en déduisant par ajout de la valeur en a. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition d'un petit « o », il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k\right| \leqslant \varepsilon |x-a|^n.$$

Alors pour un tel x,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}(x-a)^{k+1}\right| &\leqslant \left|\int_a^x \left|f(t) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t-a)^k\right| dt\right| \\ &\leqslant \varepsilon\left|\int_a^x |t-a|^n\,dt\right| \\ &\leqslant \varepsilon\,\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\int_a^x f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}(x-a)^{k+1} \underset{x\to a}{=} o((x-a)^{n+1}),$$

qui est le résultat voulu. □

Remarque – Ce résultat est très utile pour obtenir des développements limités. Par exemple, on obtient par cette méthode un développement à tout ordre en 0 de la fonction tangente, basé sur la formule $\tan' = 1 + \tan^2$; on obtient des développements de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à tout ordre en intégrant ceux de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, très faciles à obtenir à partir de la série géométrique de raison $-x$.

Théorème – Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors pour tout $a \in I$,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration – On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on reconnaît la définition de la continuité de f en a. Supposons le résultat vrai pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f', ce qui montre que pour tout $a \in I$,

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

D'après le théorème d'intégration des développements limités (f' étant continue), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}), \end{aligned}$$

d'où le résultat à l'ordre $n+1$, ce qui achève la démonstration. □

Pour terminer, donnons les développements limités de référence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$ si la somme commence à $k = 1$),

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$
- $\displaystyle e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$
- $\displaystyle \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$
- $\displaystyle \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),$
- $\displaystyle \begin{aligned} (1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \end{aligned}$
- $\displaystyle \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$
- $\displaystyle \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),$
- $\displaystyle \tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$