Chapitre 1 : Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Table des matières

1 Rappels sur les espaces vectoriels

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $+_{\mathbb{K}}$ et $\times_{\mathbb{K}}$ les additions et multiplications classiques sur $\mathbb{K}$. On note $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ les éléments neutres pour chacune de ces lois.

1.1 Définitions d'espaces et sous-espaces vectoriels

Definition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}$-ev, est un triplet $(E,+,\times)$ où E est un ensemble, $+ : E \times E \mapsto E$ est une loi de composition interne et $. : \mathbb{K} \times E \mapsto E$ est une loi de composition externe tel que

La loi $+$ vérifie les propriétés suivantes :

Commutativité : $\forall (x,y) \in E^2$, $x + y = y + x$.
Associativité : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
Existence d'un élément neutre : $\exists 0_E \in E$ *tel que* $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$.
Existence d'un symétrique : $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ *tel que* $x + y = y + x = 0_E$.

La loi . vérifie les propriétés suivantes :

Distributivité sur + : $\forall (x,y) \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$ *et* $(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
Compatibilité avec $1_{\mathbb{K}}$: $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}}.x = x$.
Compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$: $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Remarque : On peut additionner ou soustraire deux vecteurs mais on ne peut pas les multiplier entre eux, on peut juste les multiplier par un scalaire.

Definition 2

On appelle sous-espace vectoriel de $(E,+,\times)$ un ensemble F inclus dans E et stable par la structure d'espace vectoriel définie sur E :

-***Stabilité de l'élément neutre :*** $0_E \in F$
-***Stabilité par addition :*** $\forall (x,y) \in F^2$, $x + y \in F$
-***Stabilité par multiplication :*** $\forall x \in F \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$

Proposition 1

Soit $(E,+,\times)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\times)$ alors $(F,+,\times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 2

Soient $(E,+,\times)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Il y a équivalence entre :

1. $(F,+,\times)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\times)$.
2. F est non vide et $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

1.2 Construction d'espaces vectoriels

Proposition 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
L'ensemble contenant toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.x_i, \ \forall i \in [\![1;p]\!], \ \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Definition 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$, et on note Vect$(\mathcal{F})$ ou Vect$(x_1, ..., x_p)$, l'ensemble contenant toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$Vect(\mathcal{F}) = Vect(x_1, ..., x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.x_i,\ \forall i \in [\![1;p]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Vect$(\mathcal{F})$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.
2. Vect$(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux familles finies de vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F}') \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$
2. $\text{Vect}\Big(\text{Vect}(\mathcal{F})\Big) = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel).

Remarque : Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Definition 4

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et G, et on note $F + G$, l'ensemble défini par $F + G = \{u + v\ ,\ u \in F \text{ et } v \in G\}$.

$$x \in F + G \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Proposition 7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

Definition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que la famille $(e_1, .., e_p)$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1;p]\!],\ \lambda_k = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $e_1, ..., e_p$ sont linéairement indépendants.

Definition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille finie de E. On dit que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de E ou qu'elle engendre E lorsque tout vecteur de E est une combinaison linéaire de la famille $(e_1, ..., e_p)$:

$E = \text{Vect}(e_1, ..., e_p)$ ou

Definition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille finie de E. On dit que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est une base de E lorsque elle est libre et génératrice de E.

Definition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie lorsque E possède une famille génératrice finie.

$$\exists (e_1, ..., e_p) \in E^p \text{ tel que } E = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$$

Sinon, il est dit de dimension infinie.

Proposition 8

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.

Definition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E le cardinal commun à toutes les bases de E.
On note cet entier $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou simplement $\dim(E)$

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

2.1 Produits d'espaces vectoriels

Definition 10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On appelle produit cartésien de E et de F l'ensemble des couples formés par un vecteur de E et un vecteur de F.

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$

Definition 11

Soient $E_1, ..., E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On appelle produit des espaces vectoriels $E_1, ..., E_p$ l'ensemble des p-uplets formés par un vecteur de chaque espace vectoriel E_i.

$$\prod_{k=1}^{p} E_k = E_1 \times ... \times E_p = \{(x_1, ..., x_p),\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in E_i\}$$

Proposition 9

Soient $E_1, ..., E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 10

Soient $E_1, ..., E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors, l'espace vectoriel $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$$

2.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

Definition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble des vecteurs de E formés par des combinaisons linéaires des vecteurs de chaque sous-espace vectoriel F_i.

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = F_1 + \ldots + F_p = \left\{ z \in E \mid \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k \text{ tel que } z = x_1 + \ldots + x_p \right\}$$

On dit que la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est directe lorsque la décomposition est unique

$$\bigoplus_{i=1}^{p} F_k = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p = \left\{ z \in E \mid \exists ! (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k \text{ tel que } z = x_1 + \ldots + x_p \right\}$$

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. L'ensemble $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. L'ensemble $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup\limits_{k=1}^{p} F_k$
3. $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k = \mathrm{Vect}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} F_k \right)$

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre

1. La somme $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est directe.
2. $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \prod\limits_{k=1}^{p} F_k,\ \sum\limits_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_k = 0_E$.
3. $\forall i \in [\![1, p]\!],\ F_i \cap \left(\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k \right) = \{0_E\}$.

Remarque : Il ne suffit pas que les sous-espaces vectoriels soient 2 à 2 en somme directe.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors, le sous-espace vectoriel $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k \right) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

2.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Definition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E lorsque leur somme est directe *et donne E tout entier :*

$$E=\bigoplus_{k=1}^{p}F_k \text{ ou encore } \forall x\in E,\ \exists!(x_i,...,x_p)\in\prod_{k=1}^{p}F_k \text{ tel que } x=x_1+...+x_p$$

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1,...,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

$$E=\bigoplus_{k=1}^{p}F_k \Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{p}F_k \text{ et } E=\sum_{k=1}^{p}F_k$$

Si, de plus, $F_1,...,F_p$ sont de dimension finie alors

$$E=\bigoplus_{k=1}^{p}F_k \Leftrightarrow \begin{cases}\bigoplus\limits_{k=1}^{p}F_k\\ \dim(E)=\sum\limits_{k=1}^{p}\dim(F_k)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}E=\sum\limits_{k=1}^{p}F_k\\ \dim(E)=\sum\limits_{k=1}^{p}\dim(F_k)\end{cases}$$

Remarque : Comme dans le cas de 2 sous-espaces vectoriels, il faut avoir 2 des 3 propriétés.

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $(e_1,....,e_n)$ une base de E. Alors

$$E=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Vect}(e_k)=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathbb{K}.e_k$$

On a aussi

$$E=\mathrm{Vect}(e_1)\bigoplus_{k=2}^{p}\mathrm{Vect}(e_k)=\mathrm{Vect}(e_1)\bigoplus\mathrm{Vect}(e_2,e_3)\bigoplus_{k=4}^{p}\mathrm{Vect}(e_k)=...$$

On obtient une décomposition en sous-espaces supplémentaires en fractionnant une base de E.

2.4 Bases adaptées

Proposition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E.
Toute famille libre (ou base) de F peut-être complétée en une base de E

Definition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F un sous-espace vectoriel de E.
Toute base de E dont les premiers vecteurs forment une base de F est appelée <u>*base adaptée au sous-espace vectoriel F*</u>*.*

Definition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1,...,F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Une base de E obtenue en concaténant des bases de chaque sous-espaces vectoriel F_k est appelée <u>*base adaptée à la somme directe $\bigoplus\limits_{k=1}^{p}F_k$*</u>*.*

Remarque : Les matrices d'endomorphismes dans des bases adaptées ont des formes particulières, plus simples.

Remarque : Pour définir un endomorphisme sur E, il suffit de le définir sur chaque sous-espace vectoriel qui forme une décomposition de E.

Proposition 16

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.
Soit $u_1 \in \mathcal{L}(F_1, F), ..., u_p \in \mathcal{L}(F_p, F)$. Alors,
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ u_{E_i} = u_i$

3 Rappels sur les applications linéaires

3.1 Applications linéaires

Definition 16

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F toute fonction $f : E \to F$ telle que

1. $\forall (x, y) \in E,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque : Si f est linéaire de E dans F alors $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 17

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E \to F$. On a équivalence entre

1. $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. $\forall (x, y) \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

Definition 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E. On notera $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

Proposition 18

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$$

La composée de deux applications linéaires est linéaire

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G),\ g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

3.2 Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Definition 18

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble*

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$$

2. *On appelle image de f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble*

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

Proposition 19

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 20

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective lorsque $\text{Im}(f) = F$.
2. f est injective de E dans F si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Definition 19

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Lorsque f est linéaire et bijective de E dans F, on dit que f est un isomorphisme de E dans F.
On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F.

Lorsque f est linéaire et bijective de E dans E, on dit que f est un automorphisme de E. On appelle groupe linéaire et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

3.3 Endomorphismes particuliers

Definition 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_{\mathbb{K}}\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \text{ tel que } x = x_F + x_G$$

L'application $\left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_F \end{array} \right.$ *est appelée la projection sur F parallèlement à G (ou de direction G).*
On la note p_F^G ou plus simplement p_F.
L'application $\left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_G \end{array} \right.$ *est appelée la projection sur G parallèlement à F (ou de direction F).*
On la note p_G^F ou plus simplement p_G.

Proposition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_{\mathbb{K}}\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$. Soient p_F et p_G les projections associées.

1. p_F est un endomorphisme de E et $p_F \circ p_F = p_F$.
2. $\text{Ker}(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.
3. p_G est un endomorphisme de E et $p_G \circ p_G = p_G$.
4. $\text{Ker}(p_G) = F$ et $\text{Im}(p_G) = G$.
5. $p_F \circ p_G = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (endomorphisme nul)

Proposition 22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_{\mathbb{K}}\}$.Soit $p : E \to E$. On a équivalence entre :

1. p est linéaire et $p \circ p = p$.
2. p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Definition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_{\mathbb{K}}\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \text{ tel que } x = x_F + x_G$$

L'application $\left\{\begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_F - x_G \end{array}\right.$ *est appelée* *la symétrie par rapport à F parallèlement à G.*
On la note s_F^G ou plus simplement s_F.
L'application $\left\{\begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_G - x_F \end{array}\right.$ *est appelée* *la symétrie par rapport à G parallèlement à H.*
On la note s_G^F ou plus simplement s_G.

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_\mathbb{K}\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$. Soient s_F et s_G les symétries associées.

1. s_F est un endomorphisme de E et $s_F \circ s_F = \mathrm{id}_E$.
2. $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{id}_E) = G$
3. s_G est un endomorphisme de E et $s_G \circ s_G = \mathrm{id}_E$.
4. $\mathrm{Ker}(s_G - \mathrm{id}_E) = G$ et $\mathrm{Ker}(s_G + \mathrm{id}_E) = F$
5. $s_F \circ s_G = -\mathrm{id}_E$ et $s_G \circ s_F = -\mathrm{id}_E$

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_\mathbb{K}\}$. Soit $s : E \to E$. On a équivalence entre :

1. s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{id}_E$.
2. s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

3.4 Applications linéaires et dimension

Definition 22

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels différents de $\{0_\mathbb{K}\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de son image : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Proposition 25

Soient E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels différents de $\{0_\mathbb{K}\}$ et de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels différents de $\{0_\mathbb{K}\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

ce que l'on réécrit souvent

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Proposition 26

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels différents de $\{0_\mathbb{K}\}$ et de **même** dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre

1. f est injective de E dans F.
2. f est surjective de E dans F.
3. f est bijective de E dans F.

4 Compléments sur les endomorphismes

4.1 Polynômes d'endomorphismes

Definition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u^n l'endomorphisme u composé n fois : $u^n = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

Par convention, $u^0 = id_E$.

Definition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$.

On définit un nouvel endomorphisme de E par $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$.

$$\forall x \in E,\ P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme de u. On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de u.

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P = \mathbf{X}^2 - 3\mathbf{X} + 5$. Alors,

$$\forall x \in E,\ P(u)(x) = u^2(x) - 3u(x) + 5u^0(x) = u[u(x)] - 3u(x) + 5x.$$

Proposition 27

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $1(u) = id_E$.
2. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$.
3. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Proposition 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Deux polynômes en u commutent. En particulier, u commutent avec tout polynôme en u.

Definition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$.
On dit que P est un polynôme annulateur de u ou que u annule P lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.

1. Donner un polynôme annulateur de f.
2. Montrer que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Remarque : Les polynômes annulateurs servent à déterminer des inverses ou des puissances d'endomorphismes.

Remarque : Toutes ces définitions s'étendent pour les matrices : polynômes de matrices, polynômes annulateurs, recherche de l'inverse,...

4.2 Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

Definition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subset F$: $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

.

Definition 27

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
On appelle endomorphisme de F induit par u l'endomorphisme de F défini par

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$$

Remarque : Il ne s'agit pas de la restriction de u à F car l'espace d'arrivée est lui aussi modifié.

Proposition 29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$.
Alors, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

5 Rappels sur les matrices

5.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Definition 28

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 30

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$ dont la base canonique est formée par les matrices élémentaires ($E_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls sauf un 1 en position i, j.)

Definition 29

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

On appelle produit de A par B la matrice notée $A \times B$ (ou $A.B$) $\in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!],\ (A.B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Proposition 31

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif.
2. On peut avoir $A.B = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

5.2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Binôme de Newton

Proposition 32

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que A et B commutent : $A \times B = B \times A$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l \times B^{k-l}.$$

Matrices symétriques et antisymétriques

Definition 30

Soit n un entier naturel non nul et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est une matrice symétrique lorsque $A^T = A$.
On dit que A est une matrice antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 33

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

De plus, ils sont supplémentaires

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Inverse d'une matrice

Definition 31

Soit n un entier naturel non nul.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

B est l'inverse de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On la note A^{-1}.

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et on appelle groupe linéaire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 34

Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ inversibles. Alors, la matrice $A.B$ est elle aussi inversible et

$$(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

Pour calculer l'inverse d'une matrice inversible, on écrit cette matrice à côté de la matrice identité.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\text{ et }I_n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Puis, on applique des opérations sur les lignes de A pour obtenir à gauche la matrice I_n. Les mêmes opérations appliquées à la la matrice I_n permettent d'obtenir A^{-1}.

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&1&2\end{pmatrix}\qquad\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow \frac{L_3}{5}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\underset{L_3\leftarrow \frac{L_3}{5}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+3L_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\underset{L_2\leftarrow L_2+3L_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{5}&\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$A\underset{L_1\leftarrow L_1-2L_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\underset{L_1\leftarrow L_1-2L_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Donc, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

5.3 Matrice d'une application linéaire

Definition 32

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(E)=p$. Soit $\mathcal{B}_E=(e_1,...,e_p)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(F)=n$. Soit $\mathcal{B}_F=(f_1,...,f_n)$ une base de E. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

On appelle matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de la famille de vecteurs $f(\mathcal{B}_E)=(f(e_1),...,(f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & .. & f(e_j) & .. & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$.

Remarque : Si $\dim(E) = \dim(F)$ (en particulier si $E = F$) alors la matrice de f dans toutes les bases sera une matrice carrée.

Proposition 35

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(E) = p$. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(F) = n$. Soit $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.

1. Soit $x \in E$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$. Les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont obtenues en calculant $M.X$.
2. Soit $x \in E$ et soit $y \in F$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = M.X$$

Proposition 36

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(E) = p$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim(F) = n$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F.

L'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\times\dim(F).$$

Proposition 37

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F.
Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_G$ une base de G.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Remarque : Le produit matriciel comme la composée ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.

Proposition 38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f \circ ... \circ f) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\right)^n.$$

Remarque : Il est donc utile de savoir calculer facilement des puissances de matrices carrées.

Proposition 39

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E.
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. f et g commutent si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(g)$ commutent.
2. f est un automorphsime si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible et alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\right)^{-1}$$

Remarque : Il est donc utile de savoir inverser facilement des matrices.

Formules de changement de bases

Definition 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ eux bases de E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

On note cette matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition 40

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Proposition 41

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $x \in E$. On note X sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ et X' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$X' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.X = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}.X \text{ et } X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.X'$$

ce que l'on peut réécrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Proposition 42

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ et M' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$M' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.M.P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}.M.P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Proposition 43

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(\mathcal{B}_E).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\mathcal{B}'_F)$$

ce que l'on peut réécrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = \left(P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}\right)^{-1}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F}$$

Remarque : Dans le cas d'une application linéaire quelconque, il y a deux matrices de passages qui interviennent, contrairement au cas des endomorphismes.

5.4 Noyau, image et rang d'une matrice

Definition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application

$$f_A : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto A.x \end{array} \right.$$

Remarque : Soit $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice de l'application f_A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ est la matrice A.

Definition 35

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau, image et rang de la matrice A le noyau, l'image et le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A.

$$Ker(A) = Ker(f_A) = \{x \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } A.x = O\}$$
$$Im(A) = Im(f_A) = \{y \in \mathbb{K}^q \text{ tel que } \exists x \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } A.x = y\}$$
$$rg(A) = rg(f_A) = dim(Im(A))$$

Proposition 44

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1. $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
2. $\text{rg}(A.B) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.
3. Si A est une matrice inversible alors $\text{rg}(A.B) = \text{rg}(B)$.
4. Si B est une matrice inversible alors $\text{rg}(A.B) = \text{rg}(A)$.
5. Les matrices d'une application linéaire f dans des bases différentes ont le même rang.

Proposition 45

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les matrices de f dans toutes les bases ont le même rang.

Proposition 46

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.On a équivalence entre

1. A est une matrice inversible
2. $\text{rg}(A) = n$.
3. $\text{Ker}(A) = \{0\}$.
4. $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

Remarque : Le rang permet de dire si une matrice est inversible ou pas.

5.5 Déterminant d'une matrice

Proposition 47

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $f(I_n) = 1$.
2. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
3. f est antisymétrique par rapport à chacune des colonnes de sa variable.

Definition 36

On appelle déterminant cette unique application et on note $det(A)$ *pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 48

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. Si A a deux colonnes égales alors $\det(A) = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \det(\lambda.A) = \lambda^n.\det(A)$.
3. $\det(A^T) = \det(A)$.
4. $\det(A \times B) = \det(A).\det(B)$.
5. A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Proposition 49

1. Si on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice alors le déterminant est multiplié par -1.
2. Si on multiplie une colonne (ou une ligne) d'une matrice par un scalaire λ alors le déterminant est lui aussi multiplié par λ.
3. Si on ajoute à une colonne d'une matrice une autre colonnes de M multiplié par un scalaire, le déterminant ne change pas.

Proposition 50

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients sur la diagonale.
Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des coefficients sur la diagonale.

Proposition 51

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de taille $n-1$ obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Déterminant d'une famille de vecteurs

Definition 37

Soit $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ *une famille de vecteurs de* E*. on appelle déterminant de* $\mathcal{F}$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *le déterminant de la matrice formée par les coordonnées de la famille* $\mathcal{F}$ *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

$$det_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_n) = \begin{vmatrix} | & | & \vdots & | & \vdots & | & | \\ u_1 & u_2 & \vdots & u_i & \vdots & u_{n-1} & u_n \\ | & | & \vdots & | & \vdots & | & | \end{vmatrix}$$

Remarque : Seul le déterminant de n vecteurs en dimension n est bien défini.

Proposition 52

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a équivalence entre :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Le déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est non nul.

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 53

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
La quantité $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ est un scalaire qui ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Definition 38

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de u et on note $\det(u)$ le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

Proposition 54

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. $\det(u \circ v) = \det(u).\det(v)$.
2. u est un automorphisme si, et seulement si $\det(u) \neq 0$ et alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

6 Compléments sur les matrices et le déterminant

6.1 Déterminant de Van der Monde

Definition 39

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
On appelle déterminant de Van der Monde associé aux scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ et on note $V(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant suivant :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_i & a_i^2 & \ldots & a_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \det((a_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n})$$

Proposition 55

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Application : Soit $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et soit $(b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On cherche s'il existe des polynômes $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ tel que

$$P(x_0) = b_0, \ldots, P(x_n) = P(b_n).$$

Matriciellement, cela revient à résoudre l'équation

6.2 Matrices par blocs et sous-espaces stables

Exemple : Déterminer la matrice d'un projecteur dans une base bien choisie.

Definition 40

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit que A est définie par bloc lorsque A est définie par un ensemble de matrices de taille inférieure.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} I_4 & B \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Cette matrice est définie par blocs. Elle est constituée de 4 blocs.

Proposition 56

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$ une base de E adaptée à F.

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure et définie par bloc.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Proposition 57

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u et supplémentaires dans E.
Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ une base de E adaptée à cette somme directe.

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) & 0 \\ 0 & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G}(u_{|G}) \end{pmatrix}$$

Proposition 58

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_p$ une base de E. On équivalence entre :

1. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

2. $\forall i \in [\![1, p]\!], \ \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ est stable par u.

Proposition 59

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_p$ une base de E. On équivalence entre :

1. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

2. $\forall i \in [\![1,p]\!],\ u(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup .... \cup \mathcal{B}_i)$.

Opérations sur les matrices par blocs

Proposition 60

Soient $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par blocs **avec des blocs de même taille.**

1. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$

Remarque : Attention à l'ordre !!!

Remarque : On généralise cette formule à une matrice avec plus de 4 blocs.

6.3 Déterminant d'une matrice par blocs

Proposition 61

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par blocs avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$.

$$\det(M) = \det(B).$$

2. Soit $N = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par blocs avec $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

$$\det(N) = \det(B).$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par blocs.

$$\det(M) = \det(A).\det(D)$$

Proposition 62

1. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs. Alors,

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure par blocs. Alors,

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$$

6.4 Matrices semblables

Definition 41

On dit que deux matrices A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}.B.P$.

Proposition 63

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables ont le même déterminant.

Proposition 64

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si elles représentent le même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n dans deux bases différentes.

Proposition 65

Etre semblable (relation de similitude) est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Definition 42

On appelle invariant de similitude toute grandeur calculable sur une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est constante pour des matrices semblables.

Exemple : Le déterminant est un invariant de similitude.

6.5 Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Definition 43

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On appelle trace de A et on note tr(A) le scalaire défini par tr(A) $= \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

Proposition 66

L'application trace tr : $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Ker(tr) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$ (hyperplan).

Proposition 67

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées.

1. $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
2. $\text{tr}(A.B) = \text{tr}(B.A)$
3. Si A et B sont semblables alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Remarque : La trace est un invariant de similitude. Deux matrices n'ayant pas la même trace ne sont donc pas semblables.

Definition 44

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle trace de E la trace commune aux matrices de u dans toute base de E.

Exemple : Déterminer la trace d'un projecteur ou d'une symétrie.

7 Formes linéaires et hyperplans

7.1 Définitions

Definition 45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire sur E. On notera E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Definition 46

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Une appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Exemple : Ker(tr) est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

7.2 Caractérisation des hyperplans

Proposition 68

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence entre :

1. H est un hyperplan de E.
2. $\exists x_0 \in E,\ x_0 \neq 0_E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}.x_0$

Proposition 69

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence entre :

1. H est un hyperplan de E.
2. $\exists \phi \in E^*,\ \phi \neq 0$ tel que $H = \text{Ker}(\phi)$. (*un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle*).

Exemple : Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{K}_n[\mathbf{X}] \text{ tel que } \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$.

.

Proposition 70

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Deux formes linéaires sur E ont le même noyau si, et seulement si elles sont proportionnelles.

$$\forall (\phi, \psi) \in (E^*)^2,\ \mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \phi = \lambda.\psi$$

7.3 Equations d'un hyperplan

Definition 47

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un hyperplan de E. Soit $\phi \in E^*$ telle que $H = Ker(\phi)$.
L'équation $\phi(x) = 0$ est appelée équation de l'hyperplan H.

$$\forall x \in E,\ x \in H \Leftrightarrow \phi(x) = 0$$

Remarque : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. $\forall x \in E,\ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 \phi(e_1) + \cdots + x_n \phi(e_n) = 0$$

Definition 48

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un hyperplan de E. Soit $\phi \in E^*$ telle que $H = Ker(\phi)$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $\forall x \in E,\ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

L'équation $x_1 \phi(e_1) + \cdots + x_n \phi(e_n) = 0$ est appelée équation de l'hyperplan H dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

$$\forall x \in E,\ x \in H \Leftrightarrow x_1 \phi(e_1) + \cdots + x_n \phi(e_n) = 0$$

Exemple : Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{K}_n[\mathbf{X}] \text{ tel que } \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$.
Donner son équation dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$.

Exemple : Donner la forme générale d'une équation hyperplan lorsque $\dim(E) = 2$ ou $\dim(E) = 3$.

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{K}^n$.
L'ensemble $\{x \in E \backslash a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ est un hyperplan de E.

Proposition 71

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si, et seulement si elles sont proportionnelles.