Compléments de calcul intégral (corrigé niveau 3).

Théorème de convergence dominée.

30. Pour : n = 0, l'intégrale correspondante existe (et est nulle).

Pour n non nul, la fonction sous l'intégrale qu'on appellera u_n, est définie et continue sur ℝ⁺.

Puis on a : ∀ x > 0, $\left|\dfrac{n.e^{-x^2}\sin(x)}{1+n^2.x^2}\right| \le \dfrac{1}{n.x^2}$, ce qui garantit que u_n est intégrable sur ℝ⁺.

Puis :

- les fonctions u_n sont toutes continues par morceaux sur ℝ⁺, puisque continue,
- la suite (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers la fonction nulle qu'on notera u, puisque $(u_n(0))$ est la suite nulle et pour x non nul, la majoration précédente montre que $(u_n(x))$ tend vers 0,
- la fonction limite est continue sur ℝ⁺,
- enfin, la fonction définie par :

  $\varphi(x) = 1$, sur [0,1] et : $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$, sur [1,+∞),

est majorante sur ℝ⁺ pour toutes les fonctions u_n et elle est intégrable sur ℝ⁺.

Donc le théorème de convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale et la suite proposée tend vers : $\int_0^{+\infty} u(x).dx = 0$.

31. Soit x fixé dans [1,+∞).

Alors il existe un rang n_0 tel que : ∀ n ≥ n_0, on a : $x < n+1$.

Donc : ∀ n ≥ n_0, $f_n(x) = \left(1-\alpha.\dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n$, et la suite ($f_n(x)$) tend vers $e^{-\alpha.\lfloor x\rfloor}$.

On remarque par ailleurs : ∀ n ≥ 1, $u_n = \int_1^{+\infty} f_n(x).dx$.

Enfin :

- toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur [1,+∞),
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur [1,+∞) vers f définie par : ∀ x ≥ 1, $f(x) = e^{-\alpha.\lfloor x\rfloor}$,
- la fonction limite est continue par morceaux sur [1,+∞),
- on remarque que :

  ∀ 1 ≤ x < n + 1, $0 \le f_n(x) = \left(1-\alpha.\dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n \le e^{-\alpha.\lfloor x\rfloor} = f(x)$,

  ∀ n + 1 ≤ x, $0 \le f_n(x) = 0 \le e^{-\alpha.\lfloor x\rfloor} = f(x)$,

et donc f majore toutes les fonctions f_n, en étant continue par morceaux sur [1,+∞) et intégrable sur cet intervalle car : ∀ x ≥ 1, $f(x) = e^{-\alpha.\lfloor x\rfloor} \le e^{-\alpha.(x-1)}$.

Donc le théorème de convergence dominée montre que les fonctions f_n sont intégrables sur [1,+∞) et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x).dx = \int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).dx = \int_1^{+\infty} f(x).dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} e^{-\alpha.n}.dx = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha.n} = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{\alpha}-1}.$$

32. a. Les intégrales u_n existent pour tout entier n, comme intégrale sur un segment de fonctions continues.

Puis si pour : n ∈ ℕ*, on pose : $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, l'intégrale devient :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi.\sqrt{n}}{2}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).\frac{dt}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.\int_0^{\frac{\pi.\sqrt{n}}{2}} t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).dt.$$

b. Une étude rapide de fonction montre que : ∀ s ∈ $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $s \le \tan(s)$, donc pour : x ∈ $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient en intégrant : $\int_0^x u.du \leq \int_0^x \tan(u).du$, soit : $\frac{x^2}{2} \leq -\ln(\cos(x))$, et donc : $\cos(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Posons maintenant : ∀ n ∈ ℕ*, ∀ t ∈ $\left[0, \frac{\pi.\sqrt{n}}{2}\right[$, $f_n(t) = t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, et : ∀ $\frac{\pi.\sqrt{n}}{2} \leq t$, $f_n(t) = 0$.

Alors :

∀ t ∈ ℝ⁺, ∃ n_0 ∈ ℕ, ∀ $n \geq n_0$, $t < \frac{\pi.\sqrt{n}}{2}$, et pour ces valeurs de n, on a : $f_n(t) = t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$.

De plus : $\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(n.\ln\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \exp\left(n.\ln\left(1 - \frac{t^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n.\left(-\frac{t^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$,

d'où : $\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp(-t^2 + o_{+\infty}(1))$, et donc : $\lim_{n\to+\infty} \cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-t^2} = f(t)$.

- Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers f.
- La fonction f est continue sur ℝ⁺.
- On a : ∀ t ∈ $\left[0, \frac{\pi.\sqrt{n}}{2}\right[$, $|f_n(t)| = t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leq t^2.\left(e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)^n = t^2.e^{-t^2} = \varphi(t)$,

et cette inégalité reste vraie si : $\frac{\pi.\sqrt{n}}{2} \leq t$, toujours avec : $\varphi(t) = t^2.e^{-t^2}$.

La fonction φ est de plus continue, intégrable sur ℝ⁺ car : $\varphi(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Le théorème de convergence dominée montre que la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(t).dt\right)$ converge vers $\left(\int_0^{+\infty} f(t).dt\right)$.

Enfin : ∀ n ∈ ℕ*, $\int_0^{\frac{\pi.\sqrt{n}}{2}} t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).dt = \int_0^{+\infty} f_n(t).dt$, donc : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi.\sqrt{n}}{2}} t^2.\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).dt = \int_0^{+\infty} f(t).dt$.

On calcule alors : $\int_0^{+\infty} f(t).dt = \left[t.e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt = \sqrt{2}.\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

à l'aide d'une intégration par parties (la partie intégrée a une limite finie nulle en +∞), du changement de variable croissant et de classe C¹ : $t = u.\sqrt{2}$, et de la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En conclusion : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

33. a. Notons : ∀ x ∈]0,1], $u(x) = \frac{1}{x^x} = e^{-x.\ln(x)}$.

Cette fonction est définie, continue et positive sur]0,1], et a pour limite 1 en 0.
Etant prolongeable par continuité en 0, u est intégrable sur]0,1] et I existe.

b. Pour : x ∈]0,1], on a : $x^{-x} = \exp(-x.\ln(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.x^n.(\ln(x))^n}{n!}$, en utilisant le développement de la fonction exponentielle en série.

c. Notons alors : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈]0,1], $u_n(x) = \frac{(-1)^n.x^n.(\ln(x))^n}{n!}$.

- chaque fonction u_n est continue par morceaux sur]0,1], et intégrable sur]0,1] car, pour : n ≥ 1, u_n est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 (et u_0 est constante égale à 1),
- la série de fonctions converge simplement sur]0,1] vers la fonction u,
- la fonction u est définie, continue par morceaux sur]0,1],

• on peut calculer :

$\forall$ n ≥ 1, $\int_0^1 x^n.(\ln(x))^n.dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}.(\ln(x))^n]_0^1 - \frac{n}{(n+1)}.\int_0^1 x^n.(\ln(x))^{n-1}.dx = -\frac{n}{(n+1)}.\int_0^1 x^n.(\ln(x))^{n-1}.dx$,

et par récurrence : $\int_0^1 x^n.(\ln(x))^n.dx = (-1)^n.\frac{n!}{(n+1)^n}.\int_0^1 x^n.dx = (-1)^n.\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$, valable aussi pour la valeur : $n = 0$.

Donc : $\forall$ n ≥ 0, $\int_0^1 u_n(x).dx = \frac{(-1)^n}{n!}.\int_0^1 x^n.(\ln(x))^n.dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

De même : $\int_0^1 |u_n(x)|.dx = \frac{1}{n!}.\int_0^1 x^n.\left|(\ln(x))^n\right|.dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Et comme la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |u_n|$ converge (puisque : $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée et : $I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^p}$.

34. Supposons (a,b,ω) fixé comme indiqué.

On note : $\forall$ x ∈]0,+∞), $u(x) = \frac{x.e^{-a.x}}{1-e^{-b.x}}.\sin(\omega.x)$.

On peut alors écrire : $\forall$ x > 0, $\frac{1}{1-e^{-b.x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-b.n.x}$, puisque : $\left|e^{-b.x}\right| < 1$.

Donc : $\forall$ x > 0, $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x.e^{-a.x}.e^{-b.n.x}.\sin(\omega.x)$, et on peut noter :

$\forall$ n ∈ ℕ, $\forall$ x > 0, $u_n(x) = x.e^{-a.x}.e^{-b.n.x}.\sin(\omega.x)$.

On va utiliser une interversion série – intégrale et pour cela :

• chaque fonction u_n est définie, continue (donc continue par morceaux) sur ℝ+*, et intégrable sur cet intervalle puisque $x^2.u_n(x)$ tend vers 0 en +∞,

• la série de fonctions converge simplement sur ℝ+* vers u ,

• la somme de la série est continue par morceaux sur ℝ+* (car continue),

• on constate que : $\forall$ n ≥ 0, $\int_0^{+\infty}|u_n(x)|.dx \leq \int_0^{+\infty} x.e^{-(a+n.b).x}.dx = [-x.\frac{e^{-(a+n.b).x}}{a+n.b}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(a+n.b).x}}{a+n.b}.dx$.

Donc : $\int_0^{+\infty}|u_n(x)|.dx \leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(a+n.b).x}}{a+n.b}.dx = \left[-\frac{e^{-(a+n.b).x}}{(a+n.b)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(a+n.b)^2}$, ce qui garantit la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|u_n|$.

On peut donc écrire : $\int_0^{+\infty}\frac{x.e^{-a.x}}{1-e^{-b.x}}.\sin(\omega.x).dx = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x).dx$.

Enfin, on calcule avec une double intégration par parties, autorisées puisque les quantités qui apparaissent existent et : $\forall$ n ≥ 0, $\int_0^{+\infty} u_n(x).dx = \int_0^{+\infty} x.e^{-a.x}.e^{-b.n.x}.\sin(\omega.x).dx$.

Pour calculer cette dernière intégrale, on transforme le sinus en exponentielle, puis on procède par intégrations par parties (les intégrales qui apparaissent sont convergentes) :

$\int_0^{+\infty} x.e^{-a.x}.e^{-b.n.x}.e^{i.\omega.x}.dx = \int_0^{+\infty} x.e^{(-a-b.n+i.\omega).x}.dx = [x.\frac{e^{(-a-b.n+i.\omega).x}}{(-a-b.n+i.\omega)}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-a-b.n+i.\omega).x}}{(-a-b.n+i.\omega)}.dx$, et :

$\int_0^{+\infty} x.e^{(-a-b.n+i.\omega).x}.dx = \frac{1}{a+b.n-i.\omega}.\int_0^{+\infty} e^{(-a-b.n+i.\omega).x}.dx = [-\frac{e^{(-a-b.n+i.\omega).x}}{(a+b.n-i.\omega)^2}]_0^{+\infty} = \frac{1}{(a+b.n-i.\omega)^2}$, d'où :

$\int_0^{+\infty} u_n(x).dx = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(a+b.n-i.\omega)^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(a+b.n+i.\omega)^2}{((a+b.n)^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{2.(a+b.n).\omega}{((a+b.n)^2+\omega^2)^2}$.

Finalement : $\int_0^{+\infty} \frac{x.e^{-a.x}}{1-e^{-b.x}}.\sin(\omega.x).dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x).dx = 2.\omega.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a+b.n}{((a+b.n)^2+\omega^2)^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

35. a. Pour x fixé dans ℝ, la fonction : $t \mapsto \frac{e^{-a.t}-e^{-b.t}}{t}.\cos(x.t)$, est définie et continue (donc continue par morceaux) sur]0,+∞).

De plus, elle a une limite finie en 0 qui vaut $b-a$ (grâce à un développement limité), et en +∞, on a :

$\left| t^2.\frac{e^{-a.t}-e^{-b.t}}{t}.\cos(x.t) \right| \le t.(e^{-a.t}+e^{-b.t})$, qui tend vers 0 en +∞.

Donc pour tout réel x, la fonction précédente est intégrable sur]0,+∞) et $F(x)$ existe..

b. Notons : ∀ (x,t) ∈ ℝ×]0,+∞), $f(x,t) = \frac{e^{-a.t}-e^{-b.t}}{t}.\cos(x.t)$.

Alors :

- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur]0,∞),
- f admet une dérivée partielle : ∀ (x,t) ∈ ℝ×]0,+∞), $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -(e^{-a.t}-e^{-b.t}).\sin(x.t)$,
- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue par morceaux (car continue) sur]0,+∞),
- ∀ t ∈]0,+∞), $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie et continue sur ℝ,
- ∀ (x,t) ∈ ℝ×]0,+∞), $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-a.t}+e^{-b.t} = \psi(t)$, et ψ est continue (donc continue par morceaux)

sur]0,+∞), et clairement intégrable sur]0,+∞).

Donc F est de classe C^1 sur ℝ et : ∀ x ∈ ℝ, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} -(e^{-a.t}-e^{-b.t}).\sin(x.t).dt$.

On utilise alors la forme exponentielle du sinus et :

∀ x ∈ ℝ, $\int_0^{+\infty} -(e^{-a.t}-e^{-b.t}).e^{i.x.t}.dt = \left[-\frac{e^{(-a+i.x).t}}{(-a+i.x)} + \frac{e^{(-b+i.x).t}}{(-b+i.x)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(-a+i.x)} - \frac{1}{(-b+i.x)}$, et :

∀ x ∈ ℝ, $F'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{a-b}{a.b-i.x.(a+b)-x^2} \right) = \frac{(a^2-b^2).x}{(a.b-x^2)^2+x^2.(a+b)^2}$. soit finalement :

∀ x ∈ ℝ, $F'(x) = \frac{(a^2-b^2).x}{x^4+(a^2+b^2).x^2+a^2.b^2} = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}$.

c. On en déduit que : ∃ C ∈ ℝ, ∀ x ∈ ℝ, $F(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{t^2+b^2} - \frac{t}{t^2+a^2} \right).dt + C = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right) + C$.

Il suffit de calculer $F(0)$ ou la limite de F en +∞..

Calculer $F(0)$ est un exercice classique, mais on peut aussi remarquer que, si on pose :

∀ t ∈]0,+∞), $g(t) = \frac{e^{-a.t}-e^{-b.t}}{t}$, alors g est de classe C^1 sur]0,+∞), g est intégrable sur]0,+∞) avec une limite finie en 0 et g' est aussi intégrable sur]0,+∞) (mêmes arguments que pour : $t \mapsto f(x,t)$).

On a donc : ∀ x > 0, $F(x) = \int_0^{+\infty} g(t).\cos(x.t).dt = \left[\frac{1}{x}.g(t).\sin(x.t) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}.\int_0^{+\infty} g'(t).\sin(x.t).dt$,

et : ∀ x > 0, $|F(x)| = \left| 0 + \frac{1}{x}.\int_0^{+\infty} g'(t).\sin(x.t).dt \right| \le \frac{1}{x}.\int_0^{+\infty} |g'(t)|.dt$, et : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Finalement : $C = 0$, et : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F(x) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$.

36. a. Si on note : $\forall\ (x,t) \in$ ℝ$^+$xℝ$^{+*}$, $f(x,t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}.e^{-x.t}$, alors :

- $\forall$ x $\in$ ℝ$^+$, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur ℝ$^{+*}$,
- $\forall$ t $\in$ ℝ$^{+*}$, $x \mapsto f(x,t)$, est définie et continue sur ℝ$^+$,
- $\forall\ (x,t) \in$ ℝ$^+$xℝ$^{+*}$, $|f(x,t)| \le \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$, où φ est définie et continue sur ℝ$^{+*}$.

De plus : $\forall$ t $\in$ ℝ$^{+*}$, $0 \le \varphi(t) \le \frac{2}{t^2}$, ce qui montre que φ est intégrable sur [1,+∞), et

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2}.\left(1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)\right) = \frac{1}{2}+o_0(1) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2},$$

donc φ est prolongeable par continuité en 0 et est intégrable sur]0,1].
On en déduit que g est définie et continue sur ℝ$^+$.
Puis : $\forall$ t $\in$ ℝ$^{+*}$, $x \mapsto f(x,t)$, est de classe C^2 sur ℝ$^{+*}$, et :

$$\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^+\text{x}\mathbb{R}^{+*},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t}.e^{-x.t}, \text{ et : } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t)).e^{-x.t}.$$

De plus les deux fonctions : $t \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t}$, et : $t \mapsto 1-\cos(t)$, admettent des limites finies en 0 et +∞, donc étant de plus continues sur ℝ$^{+*}$, elles y sont bornées (par M_1 et M_2), et :

- $\forall$ x $\in$ ℝ$^{+*}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, et : $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$, sont définies et continues sur ℝ$^{+*}$,
- $\forall$ t $\in$ ℝ$^{+*}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, et : $x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$, sont définies et continues sur ℝ$^{+*}$,
- $\forall$ a > 0, $\forall\ (x,t) \in$ [a,+∞)×ℝ$^{+*}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le M_1.e^{-a.t} = \psi_{1,a}(t)$, et : $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \le M_2.e^{-a.t} = \psi_{2,a}(t)$,

les fonctions $\psi_{1,a}$ et $\psi_{2,a}$ étant continues et intégrables sur ℝ$^{+*}$ (même démonstration que pour φ).
Donc g est de classe C^2 sur]0,+∞).

b. Puisque : $\forall$ t $\in$ ℝ$^+$, $|e^{z.t}| = e^{a.t}$, avec : a < 0, la fonction : $t \mapsto e^{z.t}$, est intégrable sur ℝ$^+$ et I_z converge.

De plus : $I_z = \left[\frac{e^{z.t}}{z}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{a+i.b} = -\frac{a-i.b}{a^2+b^2}$, puisque : $\lim\limits_{t\to+\infty}|e^{z.t}| = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{a.t} = 0$.

En particulier : $\mathrm{Re}(I_z) = -\frac{a}{a^2+b^2}$, et : $\mathrm{Im}(I_z) = \frac{b}{a^2+b^2}$.

c. On a ainsi : $\forall$ x > 0, $g''(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).dt = \int_0^{+\infty}(1-\cos(t)).e^{-x.t}.dt = \int_0^{+\infty}e^{-x.t}.dt = \int_0^{+\infty}\cos(t).e^{-x.t}.dt$.

Puis : $\int_0^{+\infty}e^{-x.t}.dt = \left[\frac{e^{-x.t}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$, et : $\int_0^{+\infty}\cos(t).e^{-x.t}.dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-x+i).t}.dt\right) = \mathrm{Re}(I_{-x+i}) = \frac{x}{x^2+1}$, d'où :

$$\forall \text{ x > 0, } g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

On en déduit que : $\exists\ C \in$ ℝ, $\forall$ x > 0, $g'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}.\ln(x^2+1)+C$.

Puis : $\forall$ x > 0, $|g'(x)| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt\right| \le \int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|.dt \le \int_0^{+\infty}M_1.e^{-x.t}.dt = \frac{M_1}{x}$, et : $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, et comme : $g'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C \xrightarrow[x\to+\infty]{} C$, on en déduit que : $C = 0$.

Enfin : ∀ x > 0, $g(x) = \int \left(\ln(x) - \dfrac{1}{2}.\ln(x^2+1)\right).dx = x.\ln(x) - x - \dfrac{1}{2}.x.\ln(x^2+1) + \int \dfrac{x^2}{x^2+1}.dx$, soit :

$$g(x) = x.\ln(x) - x - \frac{1}{2}.x.\ln(x^2+1) + \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}.dx = x.\ln(x) - \frac{1}{2}.x.\ln(x^2+1) - \arctan(x) + C.$$

On termine avec : ∀ x > 0, $|g(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t).dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|.dt \leq \int_0^{+\infty} M.e^{-x.t}.dt \leq \dfrac{M}{x}$,

où M majore la fonction φ, et à nouveau : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Or : $x.\ln(x) - \dfrac{1}{2}.x.\ln(x^2+1) = x.\ln(x) - \dfrac{1}{2}.x.\left(\ln(x^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -\dfrac{1}{2}.x.\left(\dfrac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,

donc : $C = \dfrac{\pi}{2}$, et : ∀ x > 0, $g(x) = x.\ln(x) - \dfrac{1}{2}.x.\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

d. La continuité de g en 0 permet de déduire que : $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}.dt$.

On effectue alors une intégration par parties (autorisée car la partie intégrée a des limites finies nulles en 0 et +∞) et : $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}.dt = \left[-\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}.dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}.dt$,

et on conclut avec : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}.dt = \dfrac{\pi}{2}$.

37. a. Posons : ∀ (x,t) ∈ ℝ×ℝ⁺, $f(x,t) = \dfrac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}$.

Alors :

- ∀ x ∈ ℝ⁺*, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur ℝ⁺ car : ∀ t ∈ ℝ⁺, $|f(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction qui est évidemment intégrable sur ℝ⁺,
- f admet une dérivée partielle sur ℝ⁺*×ℝ⁺ : ∀ (x,t) ∈ ℝ⁺*×ℝ⁺, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2.e^{-x.t^2}}{1+t^2}$,
- ∀ x ∈ ℝ⁺*, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur ℝ⁺,
- ∀ t ∈ ℝ⁺, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue sur ℝ⁺,

∀ [a,b] ⊂ ℝ⁺*, ∀ (x,t) ∈ [a,b]×ℝ⁺, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-a.t^2} = \psi_{a,b}(t)$, $\psi_{a,b}$ étant continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur ℝ⁺.

Donc F est définie et de classe C^1 sur ℝ⁺*, et : ∀ x ∈ ℝ⁺*, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{-t^2.e^{-x.t^2}}{1+t^2}.dt$.

b. Si on écrit : ∀ t ∈ ℝ⁺, $-t^2 = 1-(1+t^2)$, on constate que :

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+t^2).e^{-x.t^2}}{1+t^2}.dt = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-x.t^2}.dt = F(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}.\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.du = F(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

F est donc solution sur ℝ⁺* de : $y' - y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont : ∀ x > 0, $y(x) = C.e^x$, (avec : C ∈ ℝ), et la méthode de variation de la constante donne les solutions de l'équation qui sont :

$\forall$ x > 0, $y(x) = C.e^x - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.e^x.\int_1^x \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt = C.e^x - e^x.\sqrt{\pi}.\int_1^{\sqrt{x}} e^{-u^2}.du$.

c. F étant une des solutions précédentes, on a, en changeant la borne inférieure de l'intégrale :

$\exists$ C $\in$ ℝ, $\forall$ x > 0, $F(x) = C.e^x - e^x.\sqrt{\pi}.\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}.du$.

Mais on peut remarquer que F est également définie en 0 et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.
En effet :

- $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^+$, $t \mapsto f(x,t)$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$,
- $\forall$ t $\in$ $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x,t)$, est définie et continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$,
- $\forall$ (x,t) $\in$ $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $|f(x,t)| \le \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, où φ est définie, continue (donc continue par morceaux) et

évidemment intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Donc F est bien définie en 0 et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Or : $F(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}.dt = \dfrac{\pi}{2}$, donc : $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0}(C.e^x - e^x.\sqrt{\pi}.\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}.du) = C$.

Finalement : $\forall$ x $\ge$ 0, $F(x) = (\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}.\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}.du).e^x$.

38. a. On commence par noter : $\forall$ (x,t) $\in$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}.e^{i.t.x}}{\sqrt{t}}$.

- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, car :
$\left|\dfrac{e^{-t}.e^{i.t.x}}{\sqrt{t}}\right| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et $t^2.f(x,t)$, tend vers 0 en +∞,
- f admet une dérivée partielle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$: $\forall$ (x,t) $\in$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = i.\sqrt{t}.e^{-t}.e^{i.t.x}$,
- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall$ t $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie et continue sur ℝ,
- $\forall$ (x,t) $\in$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}.e^{-t} = \psi(t)$, où ψ est définie, continue (donc continue par morceaux)

et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc F est de classe C^1 sur ℝ, et : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} i.\sqrt{t}.e^{-t}.e^{i.t.x}.dt$.

b. Une intégration par parties (justifiées car les intégrales sont convergentes) donne :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $F'(x) = \left[i.\sqrt{t}.\dfrac{e^{(-1+i.x).t}}{-1+i.x}\right]_0^{+\infty} - \dfrac{i}{-1+i.x}.\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2.\sqrt{t}}.e^{(-1+i.x).t}.dt = \dfrac{i}{2.(1-i.x)}.F(x) = \dfrac{i}{2.(1-i.x)}.F(x)$.

Donc F est solution sur ℝ de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{2.(i+x)}.y = 0$.

Les solutions sont : $\forall$ x $\in$ ℝ, $y(x) = C.\exp\left(-\int \dfrac{x-i}{2.(x^2+1)}.dx\right) = C.\exp\left(-\dfrac{1}{4}.\ln(x^2+1) + \dfrac{i}{2}.\arctan(x)\right)$.

Comme : $F(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt = 2.\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.du = \sqrt{\pi}$, on conclut que : $\forall$ x > 0, $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}.e^{\frac{i}{2}.\arctan(x)}$.

39. a. On pose : $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ×[0,π], $f(x,t) = \cos(x.\sin(t))$.
Alors :

- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue donc intégrable sur le segment [0,π],
- f admet une dérivée partielle par rapport à x à tout ordre :

$\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ $(x,t)\in$ ℝ×[0,π], $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)=(\sin(t))^p.\cos(x.\sin(t)+p.\dfrac{\pi}{2})$,

- $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ x $\in$ ℝ, $t\mapsto\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$,est continue (donc continue par morceaux) sur [0,π],
- $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ t $\in$ [0,π], $x\mapsto\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, est continue sur ℝ,
- $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ $(x,t)\in$ ℝ×[0,π], $\left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right|\le 1=\psi_p(t)$, avec ψ_p fonction continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur le segment [0,π].

Donc J_0 est définie sur ℝ, et de classe C^∞ sur ℝ, et :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ J_O^{(p)}(x)=\frac{1}{\pi}.\int_0^\pi\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t).dt=\frac{1}{\pi}.\int_0^\pi(\sin(t))^p.\cos(x.\sin(t)+p.\frac{\pi}{2}).dt\ .$$

b. En particulier, on a : $\forall$ x $\in$ ℝ, $J_0'(x)=-\dfrac{1}{\pi}.\int_0^\pi\sin(t).\sin(x.\sin(t)).dt$.

Or : $\forall$ x $\in$]0,π[, $\forall$ t $\in$ [0,π], $0\le x.\sin(t)\le\pi$, et : $0\le\sin(x.\sin(t))$, d'où : $J_0'(x)\le 0$.

Comme de plus la fonction sous l'intégrale définissant $J_0'(x)$ est continue, positive et non nulle en : $t=\dfrac{\pi}{2}$, cette intégrale est strictement positive et : $J_0'(x)<0$.

Donc J_0 est strictement décroissante sur]0,π[.

c. Comme de plus : $J_0(0)=1$, et : $J_0(\pi)=\dfrac{1}{\pi}.\int_0^\pi\cos(\pi.\sin(t)).dt$, il suffit de vérifier que cette dernière quantité est négative pour avoir le résultat voulu.

Or : $\int_0^\pi\cos(\pi.\sin(t)).dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi.\sin(t)).dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\cos(\pi.\sin(t)).dt=2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi.\sin(t)).dt$.

Puis on utilise le changement de variable : $u=\sin(t)$, qui donne : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi.\sin(t)).dt=\int_0^1\dfrac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du$.

Enfin, on coupe l'intégrale en deux et on utilise le changement de variable : $v=1-u$, et :

$$\int_0^1\frac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du-\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{\cos(\pi.(1-v))}{\sqrt{1-(1-v)^2}}.dv\text{ , soit :}$$

$$\int_0^1\frac{\cos(\pi.u)}{\sqrt{1-u^2}}.du=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(\pi.u).\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{1}{\sqrt{2.u-u^2}}\right].du=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(\pi.u).\theta(u).du\ .$$

Enfin : $\forall$ u $\in$ $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $\theta(u)=\dfrac{\sqrt{2.u-u^2}-\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}.\sqrt{2.u-u^2}}=\dfrac{2.u-1}{\sqrt{1-u^2}.\sqrt{2.u-u^2}.(\sqrt{2.u-u^2}+\sqrt{1-u^2})}\le 0$.

Donc la dernière intégrale est négative et comme la fonction sous l'intégrale est également continue est non nulle en 0 par exemple, cela permet de conclure que : $J_0(\pi)<0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte décroissance de J_0 sur [0,π] montre que J_0 s'annule en une unique valeur sur]0,π[.

d. Considérons J_0', et effectuons une intégration par parties dans $J_0'(x)$, pour : x $\in$ ℝ.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -\pi.J_0'(x)=\int_0^\pi\sin(t).\sin(x.\sin(t)).dt=[-\cos(t).\sin(x.\sin(t))]_0^\pi+x.\int_0^\pi\cos^2(t).\cos(x.\sin(t)).dt\ ,$$

donc : $\forall$ x $\in$ ℝ, $J_0'(x)=-\dfrac{1}{\pi}.x.\int_0^\pi(1-\sin^2(t)).\cos(x.\sin(t)).dt=-x.J_0(x)-x.J_0''(x)$, et J_0 est bien solution sur ℝ de l'équation différentielle : $x.y''+y'+x.y=0$.

40. a. Notons pour commencer : $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\ h(x,t) = \dfrac{e^{-x.t}}{1+t^2}$.

Alors :

- $\forall$ x $\in \mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto h(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $t^2.h(x,t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$,
- h admet des dérivées première et seconde par rapport à x sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^+$ qui valent :
  $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^+,\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t.e^{-x.t}}{1+t^2}$, et : $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2.e^{-x.t}}{1+t^2}$,
- $\forall$ x $\in \mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$, et : $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$, sont continues (donc continues par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$,
- $\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$, et : $x \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$, sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall$ [a,b] $\subset \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ (x,t) \in$ [a,b]$\times\mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t.e^{-a.t}}{1+t^2} = \psi_{a,b,1}(t)$, et : $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = e^{-a.t} \leq \psi_{a,b,2}(t)$, où

$\psi_{a,b,1}$ et $\psi_{a,b,2}$ sont continues par morceaux (car continues) et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2.e^{-x.t}}{1+t^2}.dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t}}{1+t^2}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-x.t}.dt = \frac{1}{x}.$$

Pour la fonction g, il faut d'abord prouver la convergence de $g(x)$, pour : x $\in \mathbb{R}^{+*}$.

Pour : x > 0, et : A > 0, on peut écrire : $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t+x}.dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}.dt$.

La quantité entre crochets a bien une limite finie en $+\infty$ et la deuxième intégrale converge car la fonction sous l'intégrable est clairement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $g(x)$ existe pour tout : x > 0.

Puis : $\forall$ x > 0, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}.dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}.du = \cos(x).\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du - \sin(x).\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du$,
a l'aide du changement de variable : $u = t + x$, et en utilisant le fait que les intégrales qui apparaissent convergent pour la même raison qu'au-dessus.

En écrivant par exemple : $\forall$ x > 0, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du - \int_1^{x} \frac{\sin(u)}{u}.du$, on constate que g est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall\ x > 0,\ g'(x) = -\sin(x).\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du - \cos(x).\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du - \cos(x).\frac{\sin(x)}{x} + \sin(x).\frac{\cos(x)}{x},$$

soit : $\forall$ x > 0, $\displaystyle g'(x) = -\sin(x).\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du - \cos(x).\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du$.

Enfin : $\forall$ x > 0, $\displaystyle g''(x) = -\cos(x).\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du - \sin(x).\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du + \sin(x).\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x).\frac{\cos(x)}{x}$,

soit : $g''(x) = -g(x) + \dfrac{1}{x}$.

Donc f et g sont solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle : y'' + y = $\dfrac{1}{x}$.

b. Si on reprend la fonction h utilisée pour f, on constate que h est définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, qu'elle est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ à x fixé et continue sur $\mathbb{R}^+$ à t fixé.

Enfin : $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $|h(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, où φ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$, en particulier en 0, et : $\displaystyle f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}.dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Pour g, on constate que :

$\forall$ x > 0, $\left|g(x)-g(0)\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t+x}.dt - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}.dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{-x.\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right| = x.\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right|$.

On écrit ensuite : $\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right| \le \left|\int_0^{1}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right| + \left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right| \le \int_0^{1}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt + \int_1^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t.(t+x)}.dt$.

Or la fonction : $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, est définie, positive et inférieure à 1 sur]0,1], d'où :

$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t.(t+x)}.dt\right| \le \int_0^{1}\frac{1}{t+x}.dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}.dt = \ln(x+1)-\ln(x)+1$, et : $\left|g(x)-g(0)\right| \le x.(\ln(x+1)-\ln(x)+1)$.

Ainsi, $g(x)$ tend vers $g(0)$ quand x tend vers 0 et g est continue en 0.

c. Notons S une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors : $\exists$ (α,β,α',β') $\in \mathbb{R}^4$, $f = \alpha.\sin + \beta.\cos + S$, et : $g = \alpha'.\sin + \beta'.\cos + S$.

Or : $\forall$ x > 0, $\left|f(x)\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-x.t}.dt = \frac{1}{x}$, et f tend vers 0 en +∞.

D'autre part, l'écriture : $\forall$ x > 0, $g(x) = \cos(x).\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}.du - \sin(x).\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}.du$, montre que g tend aussi vers 0 en +∞ puisque $\sin$ et $\cos$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, et les deux intégrales tendent vers 0 comme restes d'intégrales convergentes.

Et comme : $f - g = (\alpha-\alpha').\sin + (\beta-\beta').\cos$, cette fonction ne peut avoir pour limite 0 en +∞ que si : α = α', et : β = β'.

Finalement : $f = g$, sur $\mathbb{R}^{+*}$, et : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}.dt = g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

41. a. Pour : x $\in \mathbb{R}^{+*}$, on pourra noter : $n_x = \lfloor x \rfloor$.

Alors : $\forall$ α $\in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall$ x ≥ 2, $0 \le \frac{x^\alpha}{\Gamma(x)} \le \frac{(n_x+1)^\alpha}{\Gamma(n_x)} = \frac{(n_x+1)^\alpha}{(n_x-1)!}$, car Γ est croissante sur [2,+∞).

Si maintenant, on fait tendre x vers +∞, n_x tend vers +∞ et le théorème des croissances comparées montre que la quantité majorante tend vers 0.

Donc on a bien : $x^\alpha = o_{+\infty}(\Gamma(x))$, pour : α > 0.

Si on prend maintenant : α ≤ 0, alors x^α ne tend pas vers +∞ alors que c'est le cas pour $\Gamma(x)$: on a donc à nouveau : $x^\alpha = o_{+\infty}(\Gamma(x))$.

b. Pour établir cette dernière égalité, on va utiliser une série géométrique et le théorème de convergence dominée.

Dans un premier temps, si : λ = 0, alors : $\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}.e^{-t}}{1-\lambda.e^{-t}}.dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt = \Gamma(x)$, d'où l'égalité.

Puis, pour : λ ∈ [-1,+1], λ ≠ 0, on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\lambda.e^{-t}\right| < 1$, donc : $\frac{1}{1-\lambda.e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n.e^{-n.t}$, et : $\frac{t^{x-1}.e^{-t}}{1-\lambda.e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n.e^{-(n+1).t}.t^{x-1}$.

On note alors : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n(t) = \lambda^n.e^{-(n+1).t}.t^{x-1}$.

Pour tout entier n, la fonction u_n est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, car :

$u_n(t) \underset{0}{\sim} \lambda^n.t^{x-1}$, et $t^2.u_n(t)$ tend vers 0 en +∞.

De plus : $\int_0^{+\infty}|u_n| = \int_0^{+\infty}|\lambda|^n.e^{-(n+1).t}.t^{x-1}.dt = |\lambda|^n.\int_0^{+\infty}e^{-(n+1).t}.t^{x-1}.dt$,

et avec le changement de variable : $u = (n+1).t$: $\int_0^{+\infty}|u_n| = \frac{|\lambda|^n}{(n+1)^x}.\int_0^{+\infty}e^{-u}.u^{x-1}.du = \frac{|\lambda|^n}{(n+1)^x}.\Gamma(x)$.

Enfin :

- chaque fonction u_n est définie et continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^{+*}$,

- la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur ℝ+* vers $u \ : \ t \mapsto \dfrac{t^{x-1}.e^{-t}}{1-\lambda.e^{-t}}$,
- la fonction u est clairement continue (donc continue par morceaux) sur ℝ+*,
- la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|u_n|$ converge car : ∀ n ≥ 0, $\dfrac{|\lambda|^n}{(n+1)^x} \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$, et : x > 1.

Donc on peut intervertir intégrale et somme et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}.e^{-t}}{1-\lambda.e^{-t}}.dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n.\Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

Transformée de Fourier, de Laplace.

42\. a. Notons g définie sur ℝ² par : ∀ (x,t) ∈ ℝ², $g(x,t) = f(t).e^{-i.t.x}$.

On constate que :

- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto g(x,t)$, est définie, continue par morceaux sur ℝ,
- ∀ t ∈ ℝ, $x \mapsto g(x,t)$, est définie, continue sur ℝ,
- ∀ (x,t) ∈ ℝ², $|g(x,t)| \leq |f(t)|$, cette fonction majorante étant continue par morceaux, intégrable sur ℝ.

Donc ($\mathscr{F}$f) est définie et continue sur ℝ.

De plus : ∀ x ∈ ℝ, $(\mathscr{F} f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t).e^{-i.x.t}\right|.dt = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|.dt$.

b. Immédiatement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (\mathscr{F}\,\Pi_T)(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-i.x.t}.dt = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\left[\frac{e^{-i.x.t}}{-i.x}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{\sqrt{2.\pi}}.\frac{2}{x.T}.\sin\left(\frac{x.T}{2}\right).$$

Par ailleurs : $(\mathscr{F}\,\Pi_T)(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dt = \dfrac{T}{\sqrt{2.\pi}}$, ou la fonction précédente prolongée par continuité en 0.

c. On a aussi : ∀ x ∈ ℝ, $(\mathscr{F} f_a)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a.|t|}.e^{-i.x.t}.dt = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.(\int_0^{+\infty}e^{-a.t}.e^{-i.x.t}.dt + \int_0^{+\infty}e^{-a.u}.e^{+i.x.u}.du)$,

en ayant séparé l'intégrale en deux et en ayant appliqué le changement de variable : $u = -t$.

Puis, pour : ε = ±1, on a : $\int_0^{+\infty}e^{-a.u}.e^{\varepsilon.i.x.u}.du = \left[\dfrac{e^{(\varepsilon.i.x-a).u}}{(\varepsilon.i.x-a)}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{a-\varepsilon.i.x}$.

Donc : ∀ x ∈ ℝ, $(\mathscr{F} f_a)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.(\dfrac{1}{a+i.x}+\dfrac{1}{a-i.x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\dfrac{2.a}{a^2+x^2}$.

d. En reprenant la fonction g de la première question, on constate que :

- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto g(x,t)$, est continue par morceaux et intégrable sur ℝ,
- g admet une dérivée partielle : ∀ (x,t) ∈ ℝ², $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -i.t.f(t).e^{-i.t.x}$,
- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, est continue (donc continue par morceaux) sur ℝ,
- ∀ t ∈ ℝ, $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, est continue sur ℝ,
- ∀ (x,t) ∈ ℝ, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |t.f(t)|$, et la fonction majorante est continue (donc continue par morceaux)

et intégrable sur ℝ, par hypothèse.

Donc $(\mathscr{F} f)$ est de classe C¹ sur ℝ, et : ∀ x ∈ ℝ, $(\mathscr{F} f)'(x) = -i.\dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}t.f(t).e^{-i.x.t}.dt$.

e. Si maintenant on suppose f toujours continue sur ℝ, mais telle que de plus : $t \mapsto t^p.f(t)$, soit intégrable sur ℝ, alors en reprenant le principe précédent, la fonction ($\mathscr{F}$f) est de classe C^p sur ℝ, et :

$\forall\ 0 \le k \le p$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(\mathscr{F} f)^{(k)}(x) = (-i)^k.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} t^k.f(t).e^{-i.x.t}.dt$.

On peut par exemple le montrer de proche en proche ou directement (sous l'hypothèse proposée on constate que : $\forall\ 0 \le k < p$, $t^k.f(t) = o_{\pm\infty}(t^p.f(t))$, ce qui garantit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de toutes ces fonctions.

Pour obtenir le caractère C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut proposer comme hypothèses sur f :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^p.f(t)$, tend vers 0 en $\pm\infty$.

43. a. Si f est dans E, posons : $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, $h(x,t) = e^{-x.t}.f(t)$.

Alors :

- $\forall\ x > 0$, $t \mapsto h(x,t)$, est continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}^{+*}$, et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, car : $\forall\ t \in \mathbb{R}^{+*}$, $|h(x,t)| \le e^{-x.t}.M$, où f désigne un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- h admet une dérivée partielle sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ par rapport à x à tout ordre : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p.e^{-x.t}.f(t)$,
- $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$, est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$, est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \le M.|t|^p.e^{-a.t} = \psi_{a,b,p}(t)$, avec $\psi_{a,b,p}$ continue

(donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc $(\mathscr{L} f)$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\mathscr{L} f)^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} (-t)^p.e^{-x.t}.f(t).dt.$$

b. Si on note encore, pour : $f \in$ E, f un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors :

$$\forall\ x > 0,\ 0 \le |(\mathscr{L} f)(x)| \le \int_0^{+\infty} e^{-x.t}.|f(t)|.dt \le M.\int_0^{+\infty} e^{-x.t}.dt = \frac{M}{x}.$$

Donc $(\mathscr{L} f)$ tend bien vers 0 en $+\infty$.

c. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et tend vers 0 en $+\infty$.

De plus, un développement limité montre que $g(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Donc g peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, et ce prolongement étant continu sur $\mathbb{R}^+$ et admettant une limite finie (nulle) en $+\infty$, il est borné sur $\mathbb{R}^+$..

d. $(\mathscr{L} g)$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut calculer :

$$\forall\ x > 0,\ (\mathscr{L} g)'(x) = \int_0^{+\infty} -t.e^{-x.t}.\frac{\sin(t)}{t}.dt = -\int_0^{+\infty} e^{-x.t}.\sin(t).dt.$$

En écrivant alors sin sous forme exponentielle, on calcule alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x.t}.e^{i.t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-x).t}.dt = \left[\frac{e^{(i-x).t}}{i-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}, \text{ et :}$$

$$\forall\ x > 0,\ (\mathscr{L} g)'(x) = -\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{x^2+1}.$$

Donc : $\exists\ C \in \mathbb{R}$, $\forall\ x > 0$, $(\mathscr{L} g)(x) = -\arctan(x) + C$.

Enfin $(\mathscr{L} g)$ tend vers 0 en $+\infty$, donc : $C = \frac{\pi}{2}$, et : $\forall\ x > 0$, $(\mathscr{L} g)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.