

# Algèbre linéaire (corrigé niveau 1).

## Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

1. Dans les trois cas, les ensembles proposés sont :

- inclus dans les espaces de référence,
- non vides car ils contiennent le vecteur nul,
- stables par combinaison linéaire.

Donc ce sont bien des sous-espaces vectoriels des espaces proposés.

Par exemple pour  $F_1$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,

- il est formé de triplets de réels (inclusion dans  $\mathbb{R}^3$ ),
- $(0,0,0)$  vérifie la condition d'appartenance à  $F_1$  car :  $0+0-0=0$  (non vide),
- si  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  sont dans  $F_1$ , avec :  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ , alors :

$\lambda.(x, y, z) + \lambda'.(x', y', z') = (\lambda.x + \lambda'.x', \lambda.y + \lambda'.y', \lambda.z + \lambda'.z')$ , et cette combinaison linéaire est dans  $F_1$  car :  $(\lambda.x + \lambda'.x') + (\lambda.y + \lambda'.y') - (\lambda.z + \lambda'.z') = \lambda.(x + y - z) + \lambda'.(x' + y' - z') = 0$  (stabilité par combinaison linéaire).

Pour obtenir une base et la dimension de ces espaces (ici le plus simple est de commencer par déterminer une base), on raisonne par équivalences :

- soit :  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

On a :  $(u \in F_1) \Leftrightarrow (x + y - z = 0) \Leftrightarrow (z = x + y) \Leftrightarrow (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha, y = \beta, z = \alpha + \beta) \Leftrightarrow (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u = (x, y, z) = (\alpha, \beta, \alpha + \beta) = \alpha.(1,0,1) + \beta(0,1,1)) \Leftrightarrow (u \in Vect((1,0,1), (0,1,1)))$ .

Autrement dit, vu l'équivalence d'appartenance, on en déduit l'égalité d'ensembles :

$$F_1 = Vect(u_1, u_2), \text{ avec : } u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1).$$

Donc  $(u_1, u_2)$  constitue (par définition) une partie génératrice de  $F_1$ , et comme :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 = 0) \Rightarrow ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0)) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = 0),$$

la famille est de plus libre et forme donc une base de  $F_1$  qui en particulier de dimension 2.

En raisonnant de la même façon et en appliquant la méthode du pivot, on obtient :

$$F_2 = Vect(u_3), \text{ avec : } u_3 = (-2,1,3), \text{ qui forme ainsi une base de } F_2, \text{ lui-même de dimension 1.}$$

- en raisonnant de la même façon, on obtient par exemple :

$$G = Vect(v_1, v_2), \text{ avec : } v_1 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right), \text{ et : } v_2 = (-1,1,0,1), \text{ puis : } \dim(F_2) = 2.$$

- enfin, pour :  $P = a + b.X + c.X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ ,

$$(P \in H) \Leftrightarrow (a + 2b + 4c = 0) \Leftrightarrow (a = -2b - 4c) \Leftrightarrow (\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, b = \beta, c = \gamma, a = -2\beta - 4\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, P = (-2\beta - 4\gamma) + \beta.X + \gamma.X^2 = \beta.(X - 2) + \gamma.(X^2 - 4))$$

$$\Leftrightarrow (P \in Vect((X - 2), (X^2 - 4))).$$

Autrement dit :  $H = Vect(P_1, P_2)$ , avec :  $P_1 = (X - 2)$ ,  $P_2 = (X^2 - 4)$ , et  $(P_1, P_2)$  étant libre, on en déduit que :  $\dim(H) = 2$ .

### Remarques :

- pour  $F_1$ ,  $F_2$  et  $G$  on aurait pu utiliser des hyperplans de  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$  (noyaux de formes linéaires non nulles),
- pour  $H$ , on aurait aussi pu parler d'hyperplan dans  $\mathbb{R}_2[X]$  (noyau de la forme linéaire :  $P \mapsto P(2)$ ), ou dire que :  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], (P \in H) \Leftrightarrow ((X - 2) \text{ divise } P) \Leftrightarrow (\exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 2).Q)$ , ce qui aurait conduit « naturellement » à la base :  $(X - 2, X.(X - 2)) = ((X - 2), (X^2 - 2X))$ , de  $H$ .
- il n'y a pas unicité de base dans un espace vectoriel.

2. • Il est clair que si :  $\exists \lambda \in \mathbf{K}, v = \lambda.u$ , alors :  $\lambda.u - 1.v = 0$ , et la famille est liée car :  $1 \neq 0$ .

- Réciproquement, si la famille est liée, alors :  $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2, (\alpha, \beta) \neq (0,0), \alpha.u + \beta.v = 0$ .

Si maintenant on suppose que  $\beta$  est nul, alors :  $\alpha.u = 0$ , et :  $\alpha = 0$ , puisque  $u$  est non nul.

Le couple  $(\alpha, \beta)$  serait donc le couple  $(0,0)$  ce qui est exclu.

Donc :  $\beta \neq 0$ , et :  $v = -\frac{\alpha}{\beta}.u = \lambda.u$ , où on a posé :  $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ .

3. La famille  $(\sin, \cos)$  est naturellement une famille génératrice de :  $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$ .

De plus :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(\lambda.\sin + \mu.\cos = 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda.\sin(x) + \mu.\cos(x) = 0) \Rightarrow (\text{pour } : x = 0, \mu = 0, \text{ et pour } : x = \frac{\pi}{2}, \lambda = 0).$$

Donc :  $(\lambda = \mu = 0)$ , et la famille  $(\sin, \cos)$  est libre.

Donc c'est une base de  $F$ , et :  $\dim(F) = 2$ .

4. Soit :  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ , tel que :  $\lambda_1.(e_1 + a) + \dots + \lambda_p.(e_p + a) = 0$ .

On en déduit :  $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p + (\lambda_1 + \dots + \lambda_p).a = 0$ .

Distinguons alors deux cas :

•  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p \neq 0$ , et dans ce cas :  $a = -\frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} . (\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p)$ , ce qui n'est pas possible

puisque  $a$  n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par  $(e_1, \dots, e_p)$ ,

•  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$ , et dans ce cas :  $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p = 0$ , mais la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  étant libre, on en déduit :  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

Conclusion : la famille proposée est libre.

### Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

5. En raisonnant comme dans l'exercice 1, on obtient pour base de  $F$  la famille :  $u_1 = (2, -1, -1)$ .

Pour  $G$  on propose naturellement  $(u_2, u_3)$ , avec :  $u_2 = (0, 1, -1)$ , et :  $u_3 = (1, 1, 1)$ , qui est bien génératrice de  $G$ , et libre comme le montre rapidement l'étude d'une combinaison linéaire nulle.

Plusieurs méthodes alors sont possibles, la plus rapide étant sans doute de dire qu'ils sont supplémentaires si et seulement si on obtient une base de  $\mathbb{R}^3$  en réunissant ces deux bases.

Or cette réunion est formée de 3 vecteurs (la dimension de  $\mathbb{R}^3$ ) et elle est libre, soit comme le montre à nouveau l'étude d'une combinaison linéaire nulle, l'étude du rang de la famille ou le déterminant des coordonnées des trois vecteurs dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{Par exemple : } \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont bien supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ , soit :  $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ .

6. On commence par exemple par vérifier si  $(u, v, w)$  est libre et forme une base de  $F$  :

$$\text{rg}(u, v, w) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

La famille est de rang 2, donc :  $\dim(F) = 2$ , et on a trouvé une nouvelle famille génératrice de  $F$ , avec les vecteurs :  $u' = u$ ,  $v' = 4.e_2 - e_3$ .

Notons que si la famille  $(u, v, w)$  avait été libre, on aurait eu :  $\dim(F) = 3$ , et  $\dim(G) = 1$  : les sous-espaces n'auraient pas pu être supplémentaires.

Si maintenant on réunit les deux bases de  $F$  et de  $G$  ( $x$  constitue une base de  $G$  puisque non nul, donc formant une famille libre et génératrice de  $G$ ), on étudie le rang de cette famille, et :

$$\text{rg}(u', v', w) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = 3.$$

La famille est donc une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

7. Deux questions très classiques : on va procéder avec une analyse-synthèse.

• Soit :  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

On veut montrer que  $A$  se décompose de façon unique en :  $M = S + A$ , où  $S$  est symétrique et  $A$  antisymétrique.

On suppose dans un premier temps (analyse) que  $A$  et  $S$  répondent au problème et dans ce cas :

$${}^t M = {}^t S + {}^t A = S - A, \text{ donc : } M + {}^t M = 2.S, \text{ et : } S = \frac{1}{2} \cdot (M + {}^t M), \text{ puis : } A = M - S = \frac{1}{2} \cdot (M - {}^t M).$$

Donc s'il y a une solution, elle est unique et est donnée par les égalités précédentes : fin de l'analyse. Réciproquement, le couple trouvé convient car :

•  $S$  est symétrique :  ${}^t S = \frac{1}{2} ({}^t M + {}^t ({}^t M)) = S,$

•  $A$  est antisymétrique :  ${}^t A = \frac{1}{2} ({}^t M - {}^t ({}^t M)) = -A,$

• leur somme fait bien  $M$  :  $S + A = M.$

Conclusion : le couple trouvé convient pour  $M$ , et toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose bien de façon unique comme somme d'un élément de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et d'un élément de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , ce qui prouve finalement que :  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

*Remarque* : on aurait pu utiliser le fait que l'intersection de ces deux sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  était réduite à  $\{0\}$  et que la somme de leurs dimensions donnait :  $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

• De même, si on suppose qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  se décompose sous la forme :  $f = p + i$ , avec  $p$  paire et  $i$  impaire, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x), \text{ puis : } f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x), \text{ d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)), \text{ et : } i(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x)).$$

D'où unicité d'une éventuelle solution : fin de l'analyse.

Réciproquement, on vérifie que :

$p$  est bien paire,

$i$  est bien impaire,

leur somme donne bien  $f$ .

Comme précédemment, on conclut que les espaces proposés sont bien supplémentaires de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

8. Puisqu'on dispose déjà d'une base pour  $E$  et  $F$  (famille génératrice à 1 seul vecteur non nul, donc libre), on peut chercher tout d'abord une base de  $G$ .

Pour cela (voir exercice 1), on peut proposer :  $e_3 = (-3, -2, 1, 0)$ , et :  $e_4 = (-1, 0, 0, 1)$ .

On pose ensuite :  $e_1 = (0, 1, 0, 2)$ ,  $e_2 = (1, 2, -1, 0)$ , et on examine si la famille  $(e_i)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

Or cette famille étant formée de quatre vecteurs, on s'intéresse à sa liberté, donc à son rang, et :

$$\text{rg}((e_2, e_1, e_3, e_4)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ et :}$$

$$\text{rg}((e_2, e_1, e_3, e_4)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 .$$

Puisque la famille réunie est une base de  $\mathbb{R}^4$ , on a donc :  $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$ .

9. Ici la dimension de l'espace global n'est pas finie.

On cherche donc à montrer que tout élément de :  $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , se décompose de façon unique suivant  $F$  et  $G$ , et pour cela, soit :  $\varphi \in E$ .

Si  $\varphi$  peut se décomposer en :  $\varphi = f + g$ , avec :  $f \in F$ , et :  $g \in G$ , alors :  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a.x + b, \varphi(x) = f(x) + a.x + b, \text{ et : } \varphi(0) = f(0) + b = b, \text{ puis : } \varphi'(0) = f'(0) + a = a .$$

Autrement dit :  $g(x) = \varphi'(0).x + \varphi(0)$ , et :  $f(x) = \varphi(x) - \varphi'(0).x - \varphi(0)$ .

Il y a donc unicité d'une éventuelle solution.

Réciproquement, cet unique candidat convient car :

- $f(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$ ,  $f'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0$ ,
- $g$  est affine,
- on a bien :  $\varphi = f + g$ .

Donc :  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$ .

Remarque : il est immédiat que  $F$  et  $G$  sont bien des sous-espaces vectoriels de  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### Applications linéaires.

10. • Soit :  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

[ $\Rightarrow$ ] si :  $u^2 = 0$ , alors :  $\forall y \notin \text{Im}(u), \exists x \in E, y = u(x)$ , et :  $u(y) = u^2(x) = 0$ .

donc :  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ .

[ $\Leftarrow$ ] si :  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ , alors :  $\forall x \in E, u^2(x) = u(u(x))$ .

or :  $u(x) \in \text{Im}(u)$ , donc :  $u(x) \in \ker(u)$ , et :  $u(u(x)) = 0$ , et on a bien :  $u^2 = 0$ .

• Dans le cas de deux endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $E$ , l'équivalence demandée se démontre formellement de la même façon.

11. Puisque :  $f^3 = 0$ , on a :  $\text{Im}(f^2) \subset \ker(f)$ , et comme :  $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ , on a :  $\text{Im}(f^2) \subset \ker(f^2)$ .

La première inclusion est élémentaire :  $\forall y \in \text{Im}(f^2), \exists x \in E, y = f^2(x)$ , et :  $f(y) = f^3(x) = 0$ .

La seconde n'est pas plus difficile :  $\forall x \in \ker(f), f(x) = 0$ , donc :  $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ .

On déduit de la dernière inclusion que :  $\text{rg}(f^2) \leq \dim(\ker(f^2))$ .

Le théorème du rang enfin donne :  $n = \text{rg}(f^2) + \dim(\ker(f^2)) \geq 2.\text{rg}(f^2)$ , d'où la conclusion demandée.

12. Si on développe, pour :  $k \in \mathbb{N}^*$ , le produit :  $g_k = (id_E - f) \circ (id_E + f + \dots + f^{k-1})$ , on obtient :

$$g_k = id_E - f^k .$$

Donc pour :  $k = n$ , on obtient :  $g_n = id_E$ .

On vérifie de même que :  $(id_E + f + \dots + f^{n-1}) \circ (id_E - f) = id_E$ , donc  $(id_E - f)$  est bien inversible et son inverse vaut :  $(id_E - f)^{-1} = id_E + f + \dots + f^{n-1}$ .

13. Il est immédiat que  $F$  est linéaire et qu'elle associe à tout polynôme de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  un polynôme de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

De plus :  $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], (F(P) = 0) \Rightarrow (\forall 0 \leq k \leq n-1, P(\omega^k) = 0)$ .

Or les valeurs  $\omega^k$  sont toutes distinctes les unes des autres lorsque  $k$  varie entre 0 et  $n-1$ , car les arguments sont distincts dans  $[0, 2\pi[$ .

Donc le polynôme  $P$  considéré est de degré au plus  $n-1$  et admet  $n$  racines distinctes : il est donc nul. L'endomorphisme  $F$  de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  est donc injectif et c'est un automorphisme de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  puisque  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  est un espace de dimension finie.

14. Puisque  $E$  est de dimension finie, le théorème du rang donne :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = n,$$

$$\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\ker(g)) + \text{rg}(g) = n.$$

De plus le théorème des quatre dimensions donne aussi :

$$n = \dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)),$$

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)).$$

Si on ajoute les deux dernières égalités, cela donne :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \\ + \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 2.n. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0,$$

et comme les dimensions sont des entiers positifs, on aboutit à :

$$\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0.$$

Donc ces intersections sont réduites à  $\{0\}$ , et les sous-espaces vectoriels  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(g)$  d'une part, et  $\ker(f)$  et  $\ker(g)$  d'autre part sont supplémentaires dans  $E$ .

15. La relation proposée s'écrit aussi :  $f \circ (f + g) = id_E$ .

Or puisqu'on est dans un espace de dimension finie, cela garantit que  $f$  est inversible et que son inverse vaut :  $f^{-1} = f + g$ .

$$\text{Donc : } (f + g) \circ f = id_E = f^2 + g \circ f, \text{ mais cette expression vaut aussi } f^2 + f \circ g.$$

On en déduit que :  $f \circ g = g \circ f$ .

16. a.  $\varphi$  est linéaire (comme le montre le cours d'analyse) et pour  $f$  dans :  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\varphi(f)$  est dans  $E$ .

Pour  $\psi$ , il est clair également que  $\psi$  est linéaire car :

$$\forall (f_1, f_2) \in E^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(x) = \int_0^x (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(t) \cdot dt = \lambda_1 \cdot \int_0^x f_1(t) \cdot dt + \lambda_2 \cdot \int_0^x f_2(t) \cdot dt,$$

$$\text{soit encore : } \psi(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(x) = \lambda_1 \cdot \psi(f_1)(x) + \lambda_2 \cdot \psi(f_2)(x) = (\lambda_1 \cdot \psi(f_1) + \lambda_2 \cdot \psi(f_2))(x),$$

$$\text{d'où : } \psi(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot \psi(f_1) + \lambda_2 \cdot \psi(f_2).$$

De plus, si  $f$  est de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , toute primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est encore de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $\psi$  est bien une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

$$\text{b. Pour cela : } \forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt, \text{ et : } \varphi(\psi(f))(x) = f(x),$$

comme dérivée en  $x$  de la fonction précédente, autrement dit :  $\varphi \circ \psi = id_E$ .

D'autre part :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = f'(x), \text{ et : } \psi(\varphi(f))(x) = \int_0^x \varphi(f)(t) \cdot dt = \int_0^x f'(t) \cdot dt = f(x) - f(0).$$

Donc :  $\psi \circ \varphi = id_E - \theta$ , où  $\theta$  est la forme linéaire définie par :  $\forall f \in E, \theta(f) = f(0)$ .

c. La relation :  $\varphi \circ \psi = id_E$ , montre que  $\psi$  est injective (car :  $(\psi(f) = 0) \Rightarrow (\varphi \circ \psi(f) = 0 = f)$ ,

et que  $\varphi$  est surjective.

$$\text{Donc : } \text{Im}(\varphi) = E, \text{ ker}(\psi) = \{0\}.$$

Par ailleurs, il est clair que :  $\forall f \in E, (\varphi(f) = 0) \Leftrightarrow (f' = 0) \Leftrightarrow (f \text{ constante})$ , car  $\mathbb{R}$  est un intervalle.

Donc :  $\text{ker}(\varphi) = \{\text{fonctions constantes sur } \mathbb{R}\}$ .

Enfin :

$$\text{si : } g = \psi(f), \text{ avec : } (f, g) \in E^2, \text{ alors : } g(0) = 0,$$

$$\text{si : } g(0) = 0, \text{ alors : } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x g'(t) \cdot dt, \text{ et donc : } g = \psi(g').$$

$$\text{Donc : } \text{Im}(\psi) = \{g \in E, g(0) = 0\}.$$

17. On va noter  $u'$  l'application linéaire restreinte à  $E'$ , autrement dit l'application de  $E'$  dans  $F$  définie par :

$$\forall x \in E', u'(x) = u(x) \text{ (soit encore : } u' = u|_{E'}).$$

Alors le théorème du rang donne :  $\dim(\ker(u')) + \text{rg}(u') = \dim(E')$ .

Or :  $\text{rg}(u') = \dim(\text{Im}(u')) = \dim(u(E'))$ , d'une part, et :

$$\forall x \in E, (x \in \ker(u')) \Leftrightarrow (x \in E', \text{ et } : u(x) = 0) \Leftrightarrow (x \in E' \cap \ker(u)),$$

autrement dit :  $\ker(u') = E' \cap \ker(u)$ .

On en déduit que :  $\dim(E' \cap \ker(u)) + \dim(u(E')) = \dim(E')$ , soit ce que l'on voulait.

18. Montrons l'équivalence par double implication.

[ $\Rightarrow$ ]

•  $\forall x \in E, (f(x) = 0) \Rightarrow (g(f(x)) = 0) \Rightarrow (x = 0)$  car  $g \circ f$  est injective, et  $f$  est injective.

•  $\forall y \in G, \exists x \in E, y = g \circ f(x)$ , car  $g \circ f$  est surjective et :  $y = g(x')$ , avec :  $x' = f(x) \in F$ , et  $g$  est surjective.

•  $\forall y \in \text{Im}(f) \cap \ker(g), \exists x \in E, y = f(x)$ , et :  $g(y) = 0$ , donc :  $g(f(x)) = 0$ , donc :  $x = 0$ , et :  $y = 0$ .

La somme est donc directe.

•  $\forall y \in F, \exists x \in E, g(y) = g \circ f(x)$ , et :  $g(y - f(x)) = 0$ , donc :  $x' = y - f(x) \in \ker(g)$ ,

autrement dit on a trouvé :  $(x, x') \in E \times \ker(g)$ ,  $y = f(x) + x'$ .

On vient de montrer que :  $F \subset \text{Im}(f) + \ker(g)$ , l'inclusion inverse étant immédiate et finalement :

$$F = \text{Im}(f) \oplus \ker(g).$$

[ $\Leftarrow$ ]

•  $\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$ , puis :

$\exists (x, x') \in E \times \ker(g)$ ,  $y = f(x) + x'$ , du fait de la décomposition en somme directe.

Donc :  $z = g(y) = g(f(x) + x') = g \circ f(x)$ , et  $g \circ f$  est surjective.

•  $\forall x \in E, (g \circ f(x) = 0) \Rightarrow (f(x) \in \ker(g))$ .

Mais comme de plus :  $f(x) \in \text{Im}(f)$ , on en déduit que :  $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ , donc :  $f(x) = 0$ .

Enfin,  $f$  étant injective, on conclut que :  $x = 0$ , et  $g \circ f$  est injective.

Finalement,  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ .

19. a. Il est clair que :  $A_f \subset \mathcal{L}(F, E)$ , et la linéarité de  $f$  montre que  $A_f$  contient 0 et est stable par combinaison linéaire car :

•  $f \circ 0 \circ f = 0$ , et :

$$\forall (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, E)^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2, f \circ (\lambda_1 \cdot g_1 + \lambda_2 \cdot g_2) \circ f = \lambda_1 \cdot f \circ g_1 \circ f + \lambda_2 \cdot f \circ g_2 \circ f = 0.$$

Donc  $A_f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(F, E)$ .

b. Supposons donc  $f$  injective.

• Soit :  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ , telle que :  $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$ .

Alors :  $\forall x \in E, f \circ g \circ f(x) = f(g(f(x))) = 0$ , car :  $f(x) \in \text{Im}(f) \subset \ker(g)$ .

Donc :  $g \in A_f$ .

• Soit :  $g \in A_f$ .

Alors :  $\forall y \in \text{Im}(f), \exists x \in E, y = f(x)$ , et :  $f \circ g \circ f(x) = f \circ g \circ f(x) = 0$ .

Comme de plus  $f$  est supposée injective, on en déduit que :  $g(y) = 0$ , et donc :  $y \in \ker(g)$ .

On vient ainsi de montrer que :  $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$ , et  $g$  est dans le deuxième ensemble.

Finalement :  $A_f = \{g \in \mathcal{L}(F, E), \text{Im}(f) \subset \ker(g)\}$ .

c. Supposons maintenant  $f$  surjective.

• Soit :  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ , telle que :  $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$ .

Alors :  $\forall x \in E, f \circ g \circ f(x) = f(g(f(x))) = 0$ , car :  $g \circ f(x) \in \text{Im}(g) \subset \ker(f)$ .

Donc :  $g \in A_f$ .

• Soit :  $g \in A_f$ .

Alors :  $\forall z \in \text{Im}(g), \exists y \in F, z = g(y)$ , et  $f$  étant surjective :  $\exists x \in E, y = f(x)$ , soit :

$$z = g(f(x)).$$

Mais alors :  $f(z) = f(g(f(x))) = 0$ , et :  $z \in \ker(f)$ , ce qui prouve que :  $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$ .

$g$  est donc dans le deuxième ensemble.

Finalement :  $A_f = \{g \in \mathcal{L}(F,E), \text{Im}(g) \subset \ker(f)\}$ .

20. a. On a évidemment :  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ , car :  $\forall y \in \text{Im}(f^2), \exists x \in E, y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}(f)$ .

Comme de plus :  $\dim(\text{Im}(f^2)) = \text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ , on en déduit l'égalité des espaces.

De même :  $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ , et le théorème du rang donne :

$$\dim(\ker(f^2)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)),$$

d'où à nouveau l'égalité des espaces.

b. Le théorème du rang garantit déjà que :  $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$ .

Soit de plus :  $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$ .

Alors :  $\exists x \in E, y = f(x), f(y) = 0$ , donc :  $f^2(x) = 0$ , d'où :  $x \in \ker(f^2) = \ker(f)$ , et :  $y = f(x) = 0$ .

Finalement la somme est directe et on a bien :  $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ .

c. On peut commencer par noter qu'on a toujours :  $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{Im}(gof) \subset \text{Im}(g)$ , car :

$$\forall y \in \text{Im}(gof), \exists x \in E, y = gof(x) = g(f(x)) \in \text{Im}(g).$$

• Soit ensuite :  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ , tel que :  $\text{rg}(gof) = \text{rg}(g)$ .

Alors :  $\text{Im}(gof) = \text{Im}(g)$ , car on a une inclusion et égalité des dimensions.

Puis :  $\forall y \in E, g(y) \in \text{Im}(g) = \text{Im}(gof)$ , et :  $\exists x \in E, g(y) = gof(x)$ , puis :  $g(y - f(x)) = 0$ , donc :

$$x' = y - f(x) \in \ker(g), \text{ et : } y = f(x) + x', \text{ avec : } f(x) \in \text{Im}(f), \text{ et : } x' \in \ker(g).$$

Donc :  $E = \text{Im}(f) + \ker(g)$ .

• Supposons que :  $E = \text{Im}(f) + \ker(g)$ .

Pour :  $z \in \text{Im}(g), \exists y \in E, z = g(y)$ , et donc :  $\exists (x, x') \in E \times \ker(g), y = f(x) + x'$ .

On a alors :  $z - g(f(x) + x') = g(f(x)) \in \text{Im}(gof)$ .

On en déduit que :  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(gof)$ , d'où l'égalité des dimensions et finalement :  $\text{rg}(gof) = \text{rg}(g)$ .

On a toujours de même :  $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \ker(f) \subset \ker(gof)$ .

• Soit maintenant :  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ , tel que :  $\text{rg}(gof) = \text{rg}(f)$ .

Alors :  $\dim(\ker(gof)) = \dim(E) - \text{rg}(gof) = \dim(E) - \text{rg}(f) = \dim(\ker(f))$ .

Avec la remarque initiale, on en déduit que :  $\ker(f) = \ker(gof)$ .

Puis soit :  $y \in E$ , tel que :  $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ .

Alors :  $\exists x \in E, y = f(x), g(y) = 0$ , donc :  $gof(x) = 0$ , d'où :  $x \in \ker(gof)$ , donc :  $x \in \ker(f)$ , et :

$$y = f(x) = 0.$$

On conclut que :  $\{0\} = \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ .

• Supposons enfin que :  $\{0\} = \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ .

Alors :  $\forall x \in \ker(gof), f(x) \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ , donc :  $f(x) = 0$ , et :  $x \in \ker(f)$ .

Avec l'inclusion démontrée au préalable, on en déduit que :  $\ker(f) = \ker(gof)$ .

En appliquant une dernière fois le théorème du rang on conclut que :  $\text{rg}(gof) = \text{rg}(f)$ .

21. a. On constate facilement que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall y \in I_{p+1}, \exists x \in E, y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) \in I_p, \text{ d'où : } I_{p+1} \subset I_p, \text{ et :}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in N_p, f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0, \text{ donc : } x \in N_{p+1}, \text{ et : } N_p \subset N_{p+1}.$$

b. La suite  $(\dim(I_p))$  est alors une suite décroissante d'entiers naturels.

Or si elle était strictement décroissante, alors on aurait (par récurrence) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \dim(I_{p+1}) < \dim(I_p), \text{ donc : } \dim(I_{p+1}) \leq \dim(I_p) - 1, \text{ et : } \dim(I_p) \leq \dim(I_0) - p.$$

Or cette dernière inégalité est impossible puisque la suite  $(\dim(I_0) - p)$  tend vers  $-\infty$ .

Donc :  $\exists r \in \mathbb{N}$ , tel que :  $\dim(I_{r+1}) = \dim(I_r)$ , d'où :  $I_{r+1} = I_r$ , avec l'inclusion de la question a.

c. Montrons alors par récurrence que :  $\forall k \geq 1, I_{r+k} = I_r$ .

Le résultat est vrai pour :  $k = 1$ , et si on le suppose vrai jusqu'à un rang :  $k \geq 1$ , donné, alors :

$$\forall y \in I_{r+k}, \exists x \in E, \text{ tel que : } y = f^{r+k}(x) = f^k(f^r(x)),$$

et comme :  $f^r(x) \in I_r, \exists x' \in E, f^r(x) = f^{r+k}(x')$ , ce qui montre que :  $y = f^{r+2k}(x')$ .

Or :  $r + 2k = r + k + k \geq r + k + 1$ , donc :  $y \in I_{r+2k} \subset I_{r+k+1}$ , d'après la question a.

Finalement on vient de montrer que :  $I_r \subset I_{r+k+1}$ ,

et la question a permet de conclure à :  $I_r = I_{r+k+1}$ , ce qui termine la récurrence.

Enfin, le théorème du rang donne :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dim(N_r) = n - \dim(I_r) = n - \dim(I_{r+k}) = \dim(N_{r+k})$ , et la

question a permet à nouveau de conclure à :  $N_r = N_{r+k}$ .

d. On sait déjà que :  $\dim(N_r) + \dim(I_r) = \dim(E)$ , avec le théorème du rang.

Puis :  $\forall y \in I_r \cap N_r, \exists x \in E, y = f^r(x)$ , et :  $f^r(y) = 0$ , donc :  $f^{2r}(x) = 0$ .

Donc :  $x \in N_{2r}$ , et puisque :  $r \leq 2r$ , on a :  $N_r = N_{2r}$ , donc :  $x \in N_r$ , et :  $y = f^r(x) = 0$ .

Finalement la somme est directe et on a :  $I_r \oplus N_r = E$ .

e. Si la plus petite valeur  $r$  vérifiant l'égalité de la question b est telle que :  $r > n$ , alors :

$$\forall k \leq r, \dim(I_k) \leq \dim(I_0) - k, \text{ d'après la question b, et : } \dim(I_r) \leq \dim(I_0) - r \leq n - r < 0.$$

La dernière inégalité étant impossible, on conclut au résultat demandé.

### Projecteurs.

22. a. Le plus simple est de procéder par analyse-synthèse.

Soit :  $x \in E$ .

Si :  $\exists (x_1, x_2) \in \ker(f - id_E) \times \ker(f - 2id_E)$ , tel que :  $x = x_1 + x_2$ , alors :

$$(f - id_E)(x_1) = 0, \text{ donc : } f(x_1) = x_1, \text{ de même : } f(x_2) = 2x_2, \text{ et : } f(x) = x_1 + 2x_2.$$

Donc :  $f(x) - x = x_2$ , et :  $2x - f(x) = x_1$ .

Réciproquement, l'unique couple  $(x_1, x_2)$  qu'on vient de trouver vérifie :

- $x_1 + x_2 = x$ ,
- $f(x_1) = 2f(x) - f^2(x) = 2f(x) - (3f(x) - 2x) = 2x - f(x) = x_1$ , d'où :  $x_1 \in \ker(f - id_E)$ , et :
- $f(x_2) = f^2(x) - f(x) = (3f(x) - 2x) - f(x) = 2(f(x) - x) = 2x_2$ , d'où :  $x_2 \in \ker(f - 2id_E)$ .

Donc  $\ker(f - id_E)$  et  $\ker(f - 2id_E)$  sont bien supplémentaires dans  $E$ .

b. Avec la question précédente, on a montré que :

$$\forall x \in E, x = x_1 + x_2, \text{ avec : } x_1 = 2x - f(x), \text{ et : } x_2 = f(x) - x.$$

Donc :  $\forall x \in E, p(x) = 2x - f(x)$ , et :  $q(x) = f(x) - x$ , et donc :

- $(p+q)(x) = x$ , soit :  $p+q = id_E$ ,
- $(p+2q)(x) = f(x)$ , soit :  $p+2q = f$ .

c. On a directement :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, f^n(x) = f^n(x_1) + f^n(x_2) = x_1 + 2^n x_2 = p(x) + 2^n q(x)$ .

Donc :  $f^n = p + 2^n q$ .

d. En reprenant la première égalité, on constate que :

$$fo(f - 3id_E) = -2id_E, \text{ ou : } fo\left(-\frac{1}{2}(f - 3id_E)\right) = id_E.$$

Donc  $f$  est inversible et :  $f^{-1} = -\frac{1}{2}(f - 3id_E)$ .

La question c suggère alors d'essayer :  $p + 2^{-1}q = 2id_E - f + \frac{1}{2}(f - id_E) = -\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}id_E = f^{-1}$ ,

autrement dit l'égalité établie à la question c est encore valable pour :  $n = -1$ , et on peut vérifier qu'elle est encore valable pour tout :  $n \in \mathbb{Z}$ .

23. • On a immédiatement :  $\text{Im}(uov) \subset \text{Im}(u)$ , puisque :

$$\forall y \in \text{Im}(uov), \exists x \in \mathbb{R}^3, y = uov(x) = u(v(x)) \in \text{Im}(u).$$

De plus :  $\dim(\text{Im}(uov)) = \text{rg}(uov) = 2$ , et d'autre part :  $\text{Im}(u) = u(\mathbb{R}^2)$ , donc :  $\dim(\text{Im}(u)) \leq 2$ .



On en déduit bien ainsi que :  $\text{Im}(uov) = \text{Im}(u)$ .

• Si maintenant  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\text{Im}(uov)$ ., alors :  $uov(e_1) = e_1$ , et :  $uov(e_2) = e_2$ .

La famille  $(v(e_1), v(e_2))$  est alors libre dans  $\mathbb{R}^2$  car :

$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1.v(e_1) + \lambda_2.v(e_2) = 0) \Rightarrow (u(\lambda_1.v(e_1) + \lambda_2.v(e_2))) = 0 = \lambda_1.uov(e_1) + \lambda_2.uov(e_2)$ ,  
et donc :  $\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 = 0$ , d'où :  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Enfin :  $vov(v(e_1)) = v(uov(e_1)) = v(e_1)$ , et :  $vov(v(e_2)) = v(uov(e_2)) = v(e_2)$ .

Comme  $vov$  agit comme  $id_{\mathbb{R}^2}$  sur une base de  $\mathbb{R}^2$ , on en conclut que :  $vov = id_{\mathbb{R}^2}$ .

24. a. On a immédiatement :  $\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E)^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) &= (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)op + po(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) = (\lambda_1.f_1op + \lambda_2.f_2op) + (\lambda_1.pof_1 + \lambda_2.pof_2) \\ &= \lambda_1.\phi(f_1) + \lambda_2.\phi(f_2). \end{aligned}$$

b. Raisonnons par double implication.

[ $\Rightarrow$ ]

•  $\forall x \in \ker(p), f(p(x)) + p(f(x)) = f(x)$ , donc :  $p(f(x)) = f(x)$ , et  $f(x)$  étant invariant, ce vecteur appartient à  $\text{Im}(p)$ , autrement dit :  $f(\ker(p)) \subset \text{Im}(p)$ .

•  $\forall x \in \text{Im}(p), f(x) = x$ , donc :  $f(p(x)) + p(f(x)) = f(x)$ , d'où :  $f(x) + p(f(x)) = f(x)$ , et :  $p(f(x)) = 0$ , ce qui montre que :  $f(x) \in \ker(p)$ , autrement dit :  $f(\text{Im}(p)) \subset \ker(p)$ .

[ $\Leftarrow$ ]

Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $\text{Im}(p)$ , et  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker(p)$ .

Alors :  $\forall 1 \leq i \leq k, fop(e_i) + pof(e_i) = f(e_i) + 0$ , car :  $p(e_i) = e_i$ , et :  $f(e_i) \in \ker(p)$ , et :

$\forall k+1 \leq i \leq n, fop(e_i) + pof(e_i) = 0 + p(f(e_i)) = f(e_i)$ , car :  $f(e_i) \in \text{Im}(p)$ .

Donc  $fop + pof$  et  $f$  coïncident sur une base de  $E$  donc :  $fop + pof = f$ .

25. [ $\Rightarrow$ ] Supposons que  $f$  soit un projecteur de  $E$ .

Alors  $f$  et  $id_E - f$  sont des projecteurs associés à la décomposition :  $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ ,

et :  $\ker(f) = \text{Im}(id_E - f)$ , d'où :  $\dim(\text{Im}(id_E - f)) = \dim(\ker(f))$ .

Donc :  $rg(f) + rg(f - id_E) = rg(f) + rg(id_E - f) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(id_E - f)) = \dim(E) = n$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supposons que :  $rg(f) + rg(f - id_E) = n$ .

D'une part :  $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - id_E)) = n - \dim(\text{Im}(f)) + n - \dim(\text{Im}(f - id_E)) = n = \dim(E)$ .

Puis :  $\forall x \in \ker(f) \cap \ker(f - id_E)$ , on a :  $f(x) = 0$ , et :  $f(x) - x = 0$ , d'où :  $x = 0$ .

Donc la somme  $\ker(f) + \ker(f - id_E)$  est directe et on a :  $E = \ker(f) \oplus \ker(f - id_E)$ .

Soit maintenant une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  obtenue en réunissant une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $\ker(f)$  et une base  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $\ker(f - id_E)$ .

Alors :  $\forall 1 \leq k \leq p, f(e_k) = 0 = fof(e_k)$ , et :  $\forall p+1 \leq k \leq n, f(e_k) = e_k = fof(e_k)$ .

Puisque ces égalités sont obtenues pour tous les vecteurs d'une base de  $E$ , on conclut que :  $fof = f$ , et  $f$  est un projecteur.

### Matrices.

26. On commence par remarquer que la famille proposée est bien libre dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , puisque les polynômes sont échelonnés en degrés.

D'autre part, cette famille comporte 4 vecteurs, donc c'est bien une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Pour obtenir la première matrice demandée, on exprime les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}$ , et on écrit ces coordonnées en colonnes :

$$\text{mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{on voit apparaître les coefficients du binôme de Newton...}$$

Pour la matrice de passage inverse, plusieurs solutions : on calcule l'inverse la matrice précédente (plusieurs méthodes ont été vues en sup), ou on exprime les vecteurs de  $\mathcal{B}$  à partir de ceux de  $\mathcal{B}'$ .

Cela peut se faire avec :  $\forall 0 \leq k \leq n, X^k = ((X+1)-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (X+1)^i$ , et la matrice

$$\text{cherchée vaut : } \text{mat}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Remarque* : cette méthode se généralise à  $\mathbb{R}_n[X]$  avec les bases qu'on imagine.

27. a. Immédiatement :  $A^2 - 4.A + I_2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b. On en déduit que :  $A.(4.I_2 - A) = I_2$ , et A est bien inversible, avec :  $A^{-1} = 4.I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

c. Commençons par :  $k \in \mathbb{N}$ , et démontrons-le par récurrence.

La propriété est vraie pour :  $k = 0$ , et :  $k = 1$ , puisque :  $A^0 = I_2$ , et :  $A^1 = A$ .

Si maintenant, on la suppose vraie pour un entier k donné, soit :  $A^k = a_k.A + b_k.I_2$ , alors :

$$A^{k+1} = a_k.A^2 + b_k.A = a_k.(4.A - I_2) + b_k.A = (4.a_k + b_k).A - a_k.I_2 \in \text{Vect}(I_2, A),$$

ce qui termine la récurrence.

Pour  $k$  entier strictement négatif, on a :  $A^k = A^{-p} = (A^{-1})^p = (4.I_2 - A)^p \in \text{Vect}(I_2, A)$ ,

avec ce que l'on vient de démontrer (on a ici posé :  $p = -k$ ).

*Remarques pour les 5/2 :*

- vous aurez peut-être reconnu le polynôme caractéristique de  $A$  et le théorème de Cayley-Hamilton,
- on aurait pu utiliser le polynôme annulateur pour  $A$  :  $P = X^2 - 4.X + 1$ , puis se servir de la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$  :  $X^k = P.Q_k + R_k = P.Q_k + (\alpha_k.X + \beta_k)$ , pour obtenir :  $A^k = \alpha_k.A + \beta_k.I_2$ ,
- le résultat suivant se généralise à toute matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  :  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ , toujours avec le théorème de Cayley-Hamilton.

28. Pour la matrice proposée, on a donc :  $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , puis :  $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , puis :

$$(A + I_3)^3 = 0.$$

En développant, on constate alors que :  $A^3 + 3.A^2 + 3.A + I_3 = 0$ , soit :  $A.(-A^2 - 3.A - 3.I_3) = I_3$ .

Autrement dit,  $A$  est bien inversible et :  $A^{-1} = -A^2 - 3.A - 3.I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

29. a. Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , stable par multiplication et content  $J$  (s'il en existe).

Puisque  $G$  est stable par multiplication et contient  $J$ , il contient aussi  $J^2, J^3, \dots$  et toutes les puissances de  $J$ .

$$\text{Or : } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } J^3 = I_3, \text{ et : } \forall k \in \mathbb{N}, J^{3.k} = I_3, J^{3.k+1} = J, \text{ et : } J^{3.k+2} = J^2,$$

les dernières égalités sont immédiates par récurrence (la première étant suffisante pour obtenir les deux dernières).

De plus,  $G$  étant stable par combinaison linéaire,  $G$  contient toutes les matrices de la forme :

$$\lambda_0.I_3 + \lambda_1.J + \lambda_2.J^2, \text{ soit : } \{ \lambda_0.I_3 + \lambda_1.J + \lambda_2.J^2, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \} = F \subset G.$$

Montrons maintenant que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , stable par multiplication.

Pour cela, il est immédiat que :  $F = Vect(I_3, J, J^2)$ , donc que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et  $F$  contient  $J$  (pour le triplet  $(0,1,0)$ ).

Enfin, pour deux matrices :  $M = \lambda_0.I_3 + \lambda_1.J + \lambda_2.J^2$ , et :  $N = \mu_0.I_3 + \mu_1.J + \mu_2.J^2$ , dans  $F$ , on a :

$$M.N = (\lambda_0.I_3 + \lambda_1.J + \lambda_2.J^2).(\mu_0.I_3 + \mu_1.J + \mu_2.J^2) \in F,$$

du fait de la valeur des puissances de  $J$  obtenue au début de la question.

Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , stable par multiplication et contenant  $J$ , et inclus dans tout autre sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ayant les mêmes propriétés : c'est donc le sous-espace vectoriel cherché.

b. On vient de trouver une famille génératrice de  $F$  :  $(I_3, J, J^2)$ .

De plus, si :  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ , est tel que :  $\lambda_0.I_3 + \lambda_1.J + \lambda_2.J^2 = 0$ , alors : 
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0$$
, et :

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , autrement dit la famille  $(I_3, J, J^2)$  est libre et c'est une base de  $F$ .

En particulier :  $\dim(F) = 3$ .

30. a. On a :  $F = Vect(I_n, U)$ .

En effet :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(a, b) = (a - b).I_n + b.U \in Vect(I_n, U)$ , et :
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a.I_n + b.U = M(a + b, b) \in F$ .

Donc  $F$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $(I_n, U)$  en est une famille génératrice.

Comme enfin, ces deux matrices ne sont pas proportionnelles pour :  $n \geq 2$ , c'est une famille libre et donc une base de  $F$ .

En particulier :  $\dim(F) = 2$ .

b. On commence par remarquer que :  $U^2 = n.U$ , puis :  $\forall k \geq 1$ ,  $U^k = n^{k-1}.U$ .

Puis :  $\forall ((a, b), (a', b')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ ,  $M(a, b).M(a', b') = (a - b).(a' - b').I_n + ((a - b).b' + (a' - b').b + n.b.b').U$ .

c. Comme les matrices  $I_n$  et  $U$  commutent, on en déduit à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} M(a, b)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k . U^k . a^{p-k} . I_n = a^p . I_n + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} . a^{p-k} . b^k . U^k \\ &= a^p . I_n + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} . a^{p-k} . b^k . n^{k-1} . U = a^p . I_n + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} . a^{p-k} . b^k . n^k \right) U. \end{aligned}$$

Donc en ajoutant et retranchant un terme à la somme, on obtient :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall p \geq 1, M(a, b)^p = a^p . I_n + \frac{1}{n} . ((a + b.n)^p - a^p) . U,$$

et cette égalité est encore valable pour :  $p = 0$ .

d. Pour :  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on peut chercher :  $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ , tel que :  $M(a, b).M(a', b') = I_n$ .

Comme la famille  $(I_n, U)$  est libre, cela revient à trouver  $(a', b')$  tel que :

$$(a - b).(a' - b') = 1, \text{ et : } (a - b).b' + (a' - b').b + n.b.b' = 0.$$

Distinguons alors plusieurs cas :

- si :  $a = b$ , alors la matrice  $M(a, b)$  s'écrit :  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ , et :  $rg(M(a, b)) \leq 1$ , donc

$M(a, b)$  n'est pas inversible.

- si :  $a \neq b$ , alors on peut choisir :  $a' - b' = \frac{1}{a - b}$ , et chercher  $b'$  tel que :  $(a + (n - 1).b).b' + \frac{b}{a - b} = 0$ .

Distinguons à nouveau deux cas :

• si :  $a + (n-1)b = 0$ , alors :  $M(a,b) = \begin{pmatrix} -(n-1)b & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & -(n-1)b \end{pmatrix}$ , et le rang de cette matrice

est inférieur à  $(n-1)$  car ses colonnes sont liées, leur somme étant nulle.

Donc dans ce cas,  $M(a,b)$  n'est pas inversible.

• si :  $a + (n-1)b \neq 0$ , alors on peut choisir :

$$b' = -\frac{b}{(a-b)(a+(n-1)b)}, \text{ et : } a' = b' + \frac{1}{a-b} = \frac{(a+(n-2)b)}{(a-b)(a+(n-1)b)}, \text{ et on a alors :}$$

$$M(a,b)M(a',b') = I_n.$$

En résumé,  $M(a,b)$  est inversible si et seulement si :  $a \neq b$ , et :  $a + (n-1)b \neq 0$ , et dans ce cas,

$M(a,b)^{-1}$  est la matrice  $M(a',b')$  obtenue avec les valeurs  $a'$  et  $b'$  obtenues au-dessus.

31. Si au plus une de ces matrices était non inversible, les deux autres seraient, elles, inversibles donc l'une au moins, de  $A$  ou de  $C$  le serait.

En multipliant à gauche ou à droite (selon le cas) par  $A^{-1}$  ou  $C^{-1}$ , on aboutirait à un produit des deux matrices restantes égal à 0, par exemple :  $B.C = 0$ .

Mais l'une encore est inversible (par exemple  $B$ ) et en multipliant par son inverse  $B^{-1}$ , on obtient que la dernière matrice est nulle (ici ce serait :  $C = 0$ ), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de l'énoncé.

Donc au moins deux des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas inversibles.

32. a. On peut trouver le noyau de  $f$  en résolvant le système :  $A.X = 0$  (qui traduit matriciellement la relation :  $f(x) = 0$ ).

On trouve :  $\ker(f) = \text{Vect}((0,1,-1))$ .

Le théorème du rang garantit alors que :  $\text{rg}(f) = 3 - \dim(\ker(f)) = 2$ .

Or on sait aussi qu'on dispose d'une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , donnée par les images des vecteurs de la base canonique par  $f$ , et ces images se « lisent » directement dans la matrice :

$$f(e_1) = e'_1 = (1,0,0), \quad f(e_2) = e'_2 = (2,-1,0), \quad f(e_3) = e'_3 = (2,-1,0).$$

Et comme il suffit donc d'avoir une famille libre de deux vecteurs de  $\text{Im}(f)$  pour en former une base, on peut par exemple proposer pour base de  $\text{Im}(f)$  la famille  $(e'_1, e'_2)$ .

- b. Puisqu'on dispose d'une base de  $\ker(f)$  et d'une base de  $\text{Im}(f)$ , il suffit d'examiner si la famille obtenue en les réunissant est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et donc si c'est une famille libre.

On peut alors faire un calcul de rang :  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$ , puisque la matrice est triangulaire.

Donc on a bien :  $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ .

On peut vérifier que :  $A^2 \neq A$ , donc  $f$  n'est pas un projecteur (ou :  $f(e'_2) \neq e'_2$ , alors que  $e'_2$  étant dans l'image de  $f$ , il devrait être invariant par  $f$  si  $f$  était un projecteur).

On peut aussi remarquer que :  $\text{rg}(A) \neq \text{tr}(A)$ , donc  $A$  (ou  $f$ ) n'est pas un projecteur.

- c. On en a déjà parlé :  $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ .

Quant à ce qui était prévisible, beaucoup de choses ont déjà été dites ici à ce propos.

33. L'application  $u$  fait bien correspondre à une matrice  $2 \times 2$  une autre matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels.

Puis :  $\forall (X, X') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2,$

$$u(\lambda.X + \lambda'.X') = (\lambda.X + \lambda'.X').A = \lambda.X.A + \lambda'.X'.A = \lambda.u(X) + \lambda'.u(X').$$

Donc  $u$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

On peut ensuite chercher le noyau de  $u$  en posant :  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , et en résolvant :  $X.A = 0$ .

Plus proprement :  $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$(X.A = 0) \Leftrightarrow (a + 2.b = 0, c + 2.d = 0) \Leftrightarrow (X = \begin{pmatrix} -2.b & b \\ -2.d & d \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}).$$

D'où on déduit :  $\ker = \text{Vect}(A_1, A_2)$ , avec :  $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et :  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le théorème du rang donne alors :  $\dim(\text{Im}(u)) = 4 - 2 = 2$ .

Enfin, si on calcule  $u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$  et  $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ , on obtient deux éléments de  $\text{Im}(u)$  :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ qui forment clairement une famille libre, et donc une base de } \text{Im}(u).$$

Enfin la matrice représentative cherchée est une matrice  $4 \times 4$  dont on vient d'obtenir deux colonnes.

En effet, pour la déterminer, on calcule  $u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$  et  $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ , et on place

les coordonnées dans la base canonique des images obtenues en colonnes dans la matrice, soit :

$$\text{mat}(u, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \text{ où la dernière matrice est écrite par blocs.}$$

34. Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X + 1)$ .

a. On peut commencer par remarquer que  $\varphi$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

$$\text{Puis : } \forall 0 \leq k \leq n, \varphi(X^k) = (X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i, \text{ et : } \text{mat}(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où les coefficients de la matrice sont les coefficients binomiaux.

b. Il est immédiat que la matrice  $A$  est inversible car elle est échelonnée et tous ses éléments diagonaux sont non nuls (on peut aussi dire que son déterminant vaut 1, produit de ses éléments diagonaux).

De plus :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi_{-1}(P) = P(X - 1)$ , donc :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \varphi^{-1}(X^k) = (X - 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i, \text{ et : } \text{mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Procédons par analyse-synthèse.

Si une telle base existe, alors elle est formée de  $r$  premiers vecteurs et  $n - r$  autres.

Ces derniers vecteurs doivent être dans le noyau, puisque la lecture de la matrice montre que leur image par  $f$  est nulle.

D'autre part, toute image de vecteur s'exprime à l'aide des  $r$  premiers (car les autres lignes de la matrice sont nulles).

On doit donc prendre les  $r$  premiers vecteurs dans  $\text{Im}(f)$ , les  $n - r$  derniers dans  $\ker(f)$ .

Et c'est tout : fin de l'analyse.

Soit maintenant une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  formée de  $r$  vecteurs de  $\text{Im}(f)$  et de  $n-r$  vecteurs de  $\text{ker}(f)$ .

Une telle base existe puisque :  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(f)$ , et :  $r = \dim(\text{Im}(f))$ .

Alors les derniers vecteurs ont pour image 0, et les premiers ont une image dans  $\text{Im}(f)$ , donc combinaison linéaire de ces mêmes  $r$  premiers vecteurs, autrement dit :

$$\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où : } A' \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K}).$$

Reste à montrer que  $A'$  est inversible, c'est-à-dire :  $A' \in \text{GL}_r(\mathbf{K})$ .

Or, en oubliant les lignes ou colonnes nulles, on a :  $r = \text{rg}(f) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}(A' \ 0) = \text{rg}(A')$ .

Donc  $A'$  est bien inversible.

36. On peut commencer par remarquer que :  $(u^2 = 0) \Rightarrow (\text{Im}(u) \subset \text{ker}(u))$ .

Or :  $\text{rg}(u) \geq 1$ , puisque :  $u \neq 0$ .

Mais on ne peut avoir :  $\text{rg}(u) \geq 2$ , sinon on aurait aussi :  $\dim(\text{ker}(u)) \geq 2$ , avec l'inclusion précédente.

Or le théorème du rang donne :  $\text{rg}(u) + \dim(\text{ker}(u)) = 3$ .

Donc :  $\text{rg}(u) = 1$ , et :  $\dim(\text{ker}(u)) = 2$  (toujours le théorème du rang).

• Si maintenant une telle base existe (notons-la :  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ), alors :

$$u(e_2) = u(e_3) = 0, \text{ et : } u(e_1) = e_2.$$

Donc  $e_2$  est à la fois dans  $\text{Im}(u)$  et dans  $\text{ker}(u)$ .

• Soit donc (« réciproquement », « synthèse »...)  $e_2$  dans  $\text{Im}(u)$ , non nul.

Il existe un tel vecteur puisque :  $u \neq 0$ .

Etant dans  $\text{Im}(u)$ ,  $e_2$  a un antécédent qu'on va appeler  $e_1$ .

Puisque  $e_2$  est aussi dans  $\text{ker}(u)$ , soit enfin  $e_3$  qui complète  $e_2$  en une base de  $\text{ker}(u)$ .

Montrons que la famille ainsi formée convient :

Tout d'abord, elle comporte bien trois vecteurs.

Puis si :  $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$ , en composant par  $u$  :  $\alpha_1 \cdot e_2 = 0$ , d'où :  $\alpha_1 = 0$ , puisque :  $e_2 \neq 0$ .

Ensuite, on revient à :  $\alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$ , et la famille  $(e_2, e_3)$  étant une base de  $\text{ker}(u)$ , elle est libre donc :  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

La famille proposée est bien une base de  $E$ .

Enfin la matrice de  $u$  dans cette base vaut (on a tout fait pour) :  $\text{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

37. a. Procédons par analyse-synthèse.

**Analyse** : si une telle base :  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , existe, alors :  $f(e_1) = e_2$ ,  $f(e_2) = e_3$ ,  $f(e_3) = 0$ .

En particulier :  $e_3 = f^2(e_1)$ , et tous ces vecteurs sont non nuls (puisque vecteurs d'une base de  $E$ ).

Donc :  $e_1 \notin \text{ker}(f^2)$ .

**Synthèse** : soit un vecteur en dehors de  $\text{ker}(f^2)$  (il en existe puisque :  $f^2 \neq 0$ ).

Appelons ce vecteur  $e_1$ , et posons :  $e_2 = f(e_1)$ ,  $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$ .

Alors la famille ainsi formée répond au problème.

En effet :

• elle est composée de trois vecteurs,

• elle est libre car si :  $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$ , en composant par  $f^2$ , on obtient :

$$\alpha_1 \cdot f^2(e_1) + \alpha_2 \cdot f^3(e_1) + \alpha_3 \cdot f^4(e_1) = 0 = \alpha_1 \cdot f^2(e_1), \text{ soit : } \alpha_1 = 0, \text{ puis en composant du début par } f :$$

$$\alpha_2 \cdot f^2(e_1) + \alpha_3 \cdot f^3(e_1) = 0 = \alpha_2 \cdot f^2(e_1), \text{ soit : } \alpha_2 = 0, \text{ et enfin en revenant au début :}$$

$$\alpha_3 \cdot e_3 = \alpha_3 \cdot f^2(e_1) = 0, \text{ d'où : } \alpha_3 = 0.$$

• la matrice de  $f$  dans cette base est bien :  $mat(f, \mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  (on a tout fait pour).

b. Soit :  $g \in \mathcal{L}(E)$ , et notons  $B$  sa matrice représentative dans la base précédente :  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ .

Alors :  $(gof = fog) \Leftrightarrow (B.A = A.B) \Leftrightarrow (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = 0, b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3}, b_{2,1} = b_{3,2})$

$$\Leftrightarrow \left( B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{1,1} & 0 \\ b_{3,1} & b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left( B \in Vect \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

$$\text{Or : } mat(f^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :  $(gof = fog) \Leftrightarrow (B \in Vect(id_E, \mathcal{B}), mat(f, \mathcal{B}), mat(f^2, \mathcal{B})) \Leftrightarrow (g \in Vectg(id_E, f, f^2))$ .

c. Le résultat est alors le suivant :

« soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et :  $f \in \mathcal{L}(E)$ , tel que :  $f^{n-1} \neq 0, f^n = 0$ .

$$\text{Alors il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que : } mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a l'équivalence :  $\forall g \in \mathcal{L}(E), (gof = fog) \Leftrightarrow (g \in Vectg(id_E, f, \dots, f^{n-1}))$ .

Remarques :

- on aurait pu compléter cet exercice en remarquant que :  $\dim(Vect(id_E, f, f^2)) = 3$  (ou  $n$  dans le cas général).
- l'ensemble des  $g$  qui commutent avec  $f$  s'appelle le « commutant de  $f$  » et se note parfois  $Com(f)$ .

38. a. Soit un tel vecteur colonne  $X$  et  $i_0$  défini comme suggéré, à savoir tel que :  $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Alors :  $x_{i_0} \neq 0$ , sinon on aurait :  $X = 0$ .

Si on écrit la ligne  $i_0$  du produit matriciel :  $A.X = 0$ , cela donne :  $\sum_{k=1}^n a_{i_0,k} \cdot x_k = 0$ , et en particulier :

$$a_{i_0} \cdot x_{i_0} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0,k} \cdot x_k, \text{ d'où : } a_{i_0} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0,k} \cdot \frac{x_k}{x_{i_0}}, \text{ puis avec l'inégalité triangulaire :}$$

$$|a_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0,k} \cdot \frac{x_k}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0,k}| \cdot \left| \frac{x_k}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0,k}|, \text{ la dernière inégalité découlant de la définition de } i_0.$$

Or le résultat obtenu contredit l'hypothèse faite sur la matrice.

b. On ne peut donc pas trouver :  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}), X \neq 0$ , tel que :  $A.X = 0$ .

Formulé autrement (contraposée), cela donne :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}), (A.X = 0) \Rightarrow (X = 0)$ .

Autrement dit, la matrice  $A$  est inversible.

On peut pour s'en convaincre dire que l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbf{C}^n$  canoniquement associé à  $A$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{C}^n, (u(x) = 0) \Rightarrow (u = 0), \text{ donc : } \ker(u) = \{0\},$$

et en dimension finie, l'injectivité d'un endomorphisme entraîne sa bijectivité donc l'inversibilité de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de l'espace.

### Trace.

39. a. Il suffit, pour  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ , de noter A et B leurs matrices représentatives dans une base de E.

Alors dans cette base,  $f \circ g$  est représenté par  $A.B$  et  $g \circ f$  par  $B.A$ .

Enfin :  $tr(f \circ g - g \circ f) = tr(A.B - B.A) = tr(A.B) - tr(B.A) = 0$ .

b. Le résultat n'est pas tout à fait vrai.

En effet, dans un tel espace de dimension n, on a :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, tr(f \circ g - g \circ f) = 0, \text{ et : } tr(id_E) = tr(I_n) = n.$$

Donc si un tel couple existe, on a :  $n = 0$ .

Réciproquement, dans l'espace  $\{0\}$ , alors on a bien :  $id_E \circ id_E - id_E \circ id_E = 0$ , puisqu'alors :  $id_E = 0$ .

En dehors de ce cas passionnant, c'est effectivement impossible.

40. a. La trace étant linéaire, il est immédiat que  $\phi$  est linéaire et donc que  $\phi$  un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

b. Soit :  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\text{Alors : } (M \in \ker(\phi)) \Leftrightarrow (tr(A).M = tr(M).A) \Leftrightarrow (M = \frac{tr(M)}{tr(A)}.A).$$

Donc tout élément de  $\ker(\phi)$  est proportionnel à A et :  $\ker(\phi) \subset Vect(A)$ .

Réciproquement :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda.A) = tr(A).\lambda.A - \lambda.tr(A).A = 0$ , et :  $Vect(A) \subset \ker(\phi)$ .

Finalement :  $\ker(\phi) = Vect(A)$ .

Le théorème du rang permet d'obtenir alors :  $\dim(\text{Im}(\phi)) = n^2 - \dim(\ker(\phi)) = n^2 - 1$ .

Mais de plus :  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(\phi(M)) = tr(tr(A).M - tr(M).A) = tr(A).tr(M) - tr(M).tr(A) = 0$ .

Donc :  $\text{Im}(\phi) \subset \ker(tr)$ .

Or  $tr$  est une forme linéaire non nulle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc son noyau est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc de dimension  $n^2 - 1$  : on en déduit que  $\text{Im}(\phi)$  est l'ensemble des matrices de trace nulle.

41. a. Si X est solution alors :  $X = B - tr(X).A$ , et donc X est bien de la forme annoncée, avec :

$$\lambda = tr(X) \in \mathbf{K}.$$

b. Supposons que :  $tr(A) \neq -1$ .

Alors si X est solution, on a :

$$tr(X + tr(X).A) = tr(B), \text{ donc : } tr(X).(1 + tr(A)) = tr(B), \text{ d'où : } tr(X) = \frac{tr(B)}{1 + tr(A)}.$$

$$\text{Donc X ne peut valoir que : } X = B - \left( \frac{tr(B)}{1 + tr(A)} \right).A.$$

Réciproquement, montrons que cet unique candidat est bien solution du problème.

$$\text{Pour cela : } tr(X) = tr(B) - \left( \frac{tr(B)}{1 + tr(A)} \right).tr(A) = tr(B) \cdot \left[ 1 - \frac{tr(A)}{1 + tr(A)} \right] = \frac{tr(B)}{1 + tr(A)}, \text{ d'où :}$$

$$X + tr(X).A = \left[ B - \left( \frac{tr(B)}{1 + tr(A)} \right).A \right] + \left( \frac{tr(B)}{1 + tr(A)} \right).A = B, \text{ et X est bien l'unique solution du problème.}$$

c. Supposons maintenant que :  $tr(A) = -1$ .

De même si X est solution du problème, alors on a toujours :

$$tr(X + tr(X).A) = tr(B), \text{ donc : } tr(X).(1 + tr(A)) = tr(B), \text{ et donc : } tr(B) = 0.$$

Or  $tr(B)$  est une des données initiales du problème, donc deux possibilités se présentent :

- si :  $tr(B) \neq 0$ , alors l'équation n'a pas de solution.
- si :  $tr(B) = 0$ , montrons que toute matrice obtenue à la question a est solution.

Pour cela, si :  $X = B + \lambda.A$ , alors :  $tr(X) = tr(B) + \lambda.tr(A) = -\lambda$ , et :

$$X + tr(X).A = (B + \lambda.A) - \lambda.A = B,$$

et X est bien solution de l'équation, qui admet donc une infinité de solutions.

### Formes linéaires, dualité, hyperplans.



42. a. Si  $D$  n'est pas incluse dans  $H$ , alors :  $H + D \neq H$ , car sinon on aurait :  
 $\forall x \in D, x = (0 + x) \in (H + D)$ , donc :  $x \in H$ , et on aurait :  $D \subset H$ .  
 Donc  $H + D$  contient  $H$  mais n'est pas égal à  $H$  et :  $\dim(H + D) > \dim(H)$ , d'où :  
 $\dim(H + D) > n - 1$ , et :  $\dim(H + D) = n$ .  
 Donc :  $H + D = E$ .  
 Comme de plus :  $\dim(H) + \dim(D) = (n - 1) + 1 = n$ ,  $H$  et  $D$  sont bien supplémentaires dans  $E$ .
- b. Si  $H$  et  $D$  sont supplémentaires dans  $E$ , alors :  $H \cap D = \{0\}$ , et :  $D \not\subset H$ .
43. a. Soit  $P$  de degré  $k$  et de coefficient dominant égal à  $a_k$ .  
 Alors  $\phi(P)$  est un polynôme de degré au plus  $k$  et le coefficient  $\alpha_k$  de  $X^k$  dans  $\phi(P)$  est :  

$$\alpha_k = a_k \cdot \frac{1}{2^k} + a_k \cdot \frac{(-1)^k}{2^k} - 2 \cdot a_k = a_k \left( \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^k} - 2 \right).$$
- Si :  $k = 0$ , alors :  $\alpha_k = 0$ , et  $\phi(P)$  est nul.
  - Si :  $k \neq 0$ ,  $\left| \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^k} - 2 \right| = 2 - \frac{1}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^k} \geq 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$ , et :  $\alpha_k \neq 0$ , donc :  $\deg(\phi(P)) = \deg(P)$ .
- b. Puisque :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ , et que  $\phi$  est clairement linéaire,  $\phi$  permet bien de définir un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- c. La question a montre que :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (\deg(P) \geq 1) \Rightarrow (\phi(P) \neq 0)$ ,  
 on en déduit que :  $\ker(\phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$ .  
 De plus, on a aussi constaté que :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (\deg(P) = 0) \Rightarrow (\phi(P) = 0)$ .  
 Donc :  $\ker(\phi) = \mathbb{R}_0[X]$ .  
 $\text{Im}(\phi)$  est alors de dimension  $n$  du fait du théorème du rang.  
 Une base de  $\text{Im}(\phi)$  est par exemple  $(\phi(X), \dots, \phi(X^n))$ .
- d. Il est immédiat que  $\theta$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  puisque à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et linéaire par linéarité de l'intégrale sur  $[0, 1]$ , et son noyau est donc un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ , donc de dimension  $n$ .
- Puis :  $\forall 1 \leq k \leq n, \int_0^1 \phi(t^k) \cdot dt = \int_0^1 \left( \frac{t^k}{2^k} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)^k - 2t^k \right) dt = \left[ \frac{t^{k+1}}{2^k \cdot (k+1)} - \frac{2}{k+1} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{k+1} - 2 \cdot \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$ .
- Donc :  $\int_0^1 \phi(t^k) \cdot dt = \left( \frac{1}{2^k \cdot (k+1)} - \frac{2}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 2 \cdot \frac{1}{k+1} \right) - \left( -\frac{2}{k+1} \right) = 0$ .
- On en déduit que :  $\text{Im}(\phi) \subset \ker(\theta)$ , et comme :  $\dim(\text{Im}(\phi)) = \dim(\ker(\theta)) = n$ , on conclut que :  
 $\ker(\theta) = \text{Im}(\phi)$ .

44. On peut noter que  $\phi$  est effectivement une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .  
 Puisque  $f$  est une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de  $E$ .  
 Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $\ker(f)$  que l'on complète avec  $e_n$  en une base de  $E$ .  
 Si on note :  $u = u_1 \cdot e_1 + \dots + u_n \cdot e_n$ , alors :  $f(u) = u_1 \cdot f(e_1) + \dots + u_n \cdot f(e_n) = 0 + u_n \cdot f(e_n) = u_n \cdot f(e_n)$ .  
 Alors :  $\forall 1 \leq k \leq n - 1, (id_E + \phi)(e_k) = e_k + f(e_k) \cdot u = e_k$ , et :  $(id_E + \phi)(e_n) = e_n + f(e_n) \cdot u$ .

La matrice  $A$  de  $(id_E + \phi)$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  s'écrit donc : 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f(e_n) \cdot u_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & f(e_n) \cdot u_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 + f(e_n) \cdot u_n \end{pmatrix}.$$

Donc :  $\det(id_E + \phi) = 1 + u_n \cdot f(e_n) = 1 + f(u)$

## Calcul de déterminants.

45. On peut commencer par remplacer les colonnes  $C_2$  et  $C_3$  par  $C_k - C_1$ , pour :  $k = 2, 3$ .

On factorise ensuite avec :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right), \text{ et : } \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p) \cdot \cos(q)},$$

et on développe par rapport à la première ligne, ce qui donne :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \cdot \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) & -2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \\ \frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{vmatrix}.$$

On factorise ensuite dans la première et la deuxième ligne, la première et la deuxième colonne, et :

$$D = -2 \cdot \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \begin{vmatrix} \sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \\ \frac{1}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} & \frac{1}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \end{vmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} \sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix},$$

où  $C$  est le coefficient factorisé.

On termine en remarquant que :  $\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ , ainsi que la formule similaire pour l'autre terme.

D'où :  $D = C \cdot [1 - 1] = 0$ .

46. On commence par additionner toutes les colonnes à la première, puis on soustrait la première ligne à toutes les autres, d'où :

$$D = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z) \cdot \begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix}.$$

Pour ce nouveau déterminant, on remplace  $C_2$  par  $C_2 + C_1$ , et  $C_3$  par  $C_3 + C_1$ , d'où :

$$D = (x+y+z) \cdot \begin{vmatrix} -x & z-y-x & y-z-x \\ z-x & -y+z-x & 0 \\ y-x & 0 & -z+y-x \end{vmatrix} = (x+y+z) \cdot (z-x-y) \cdot (y-z-x) \cdot \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On termine en développant le dernier déterminant et :  $D = (x+y+z) \cdot (z-x-y) \cdot (y-z-x) \cdot (x-y-z)$ .

L'ensemble des triplets de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant :  $D = 0$ , est donc la réunion de quatre plans, donnés par les équations :  $x+y+z=0$ ,  $x-y-z=0$ ,  $y-z-x=0$ ,  $z-x-y=0$ .

47. Pour le premier déterminant, on peut remplacer chaque colonne  $C_k$  par  $C_k - C_1$ , et :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix} = (n-1)! \text{ (il est triangulaire inférieur).}$$

Pour le deuxième déterminant, on remplace la première colonne par  $C_1 - (C_2 + \dots + C_n)$ , et :

$$\det \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (2-n).a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (2-n).a^n, \text{ (triangulaire supérieur).}$$

Pour le troisième déterminant, on remplace d'abord  $C_1$  par  $C_1 + C_n$ , puis  $L_n$  par  $L_n + L_1$ , et :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe alors suivant la première colonne puis suivant la dernière ligne, et :  $\forall n \geq 3, D_n = D_{n-2}$ .

On en déduit que :

- $\forall n \geq 1, n$  impair,  $D_n = D_1 = 0$ ,
- $\forall n \geq 2, n$  pair,  $D_n = D_2 = 1$ .

48. a. La matrice  $A$  vaut :  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ .

On remplace alors chaque colonne  $C_k$  par  $C_k - C_{k+1}$ , de la 1<sup>ère</sup> à la  $(n-1)$ <sup>ème</sup>.

Cela donne :  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{n-1} - a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} - a_n & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_n \cdot (a_1 - a_2) \cdots (a_{n-1} - a_n)$ .

b. Pour le premier des deux déterminants demandés ( $D_{\max}$  et  $D_{\min}$ ), on pose :  $\forall 1 \leq i \leq n, a_i = i$ .

Dans ce cas, puisque :  $\forall 1 \leq i \leq n-1, a_i - a_{i+1} = -1$ , on obtient avec la question a :  $D_{\max} = n \cdot (-1)^{n-1}$ .

Pour le deuxième, partons de :  $\forall 1 \leq i \leq n, a_i = n+1-i$ , pour obtenir :  $A = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour le calcul de  $\det(A)$ , on intervertit les lignes  $L_k$  et  $L_{n-k}$ , ce qui fait apparaître un certain nombre de  $-1$ , puis on intervertit les colonnes  $C_k$  et  $C_{n-k}$ , qui fait apparaître le même nombre de  $-1$ , donc globalement un nombre pair de  $-1$ .

Or le déterminant devient alors :  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = D_{\min}$ .

Enfin :  $\forall 1 \leq i \leq n-1, a_i - a_{i+1} = 1$ , donc :  $\det(A) = 1$ , et :  $D_{\min} = 1$ .

### Déterminants tridiagonaux.

49. Pour le calcul de  $D_n$ , on commence par développer suivant la première ligne, ce qui fait apparaître  $D_{n-1}$  et un deuxième déterminant, que l'on développe alors suivant la première colonne et :

$$D_n = (a+b).D_{n-1} - a.b.1.D_{n-2}.$$

Donc la suite  $(D_n)$  vérifie la relation de récurrence :  $\forall n \geq 3, D_n - (a+b).D_{n-1} + a.b.D_{n-2} = 0$ .

L'équation caractéristique associée est alors :  $r^2 - (a+b).r + a.b = 0$ , dont les racines sont  $a$  et  $b$ .

Distinguons alors deux cas :

- si :  $a \neq b$ , alors :  $\exists ! (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2, \forall n \geq 1, D_n = \alpha.a^n + \beta.b^n$ .

On détermine alors  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide de  $D_1$  et  $D_2$ , avec :

$$D_1 = a + b = \alpha.a + \beta.b,$$

$$D_2 = a^2 + a.b + b^2 = \alpha.a^2 + \beta.b^2.$$

Après résolution du système (dans le cas où  $a$  et  $b$  sont non nuls), on obtient :  $\alpha = \frac{a}{a-b}, \beta = \frac{b}{b-a}$ .

D'où :  $\forall n \geq 1, D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ , et si  $a$  ou  $b$  est nul, ce résultat est encore valable (le déterminant est alors triangulaire inférieur).

- si :  $a = b$ , alors :  $\exists ! (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2, \forall n \geq 1, D_n = (\alpha + \beta.n).a^n$ .

Alors avec à nouveau  $D_1$  et  $D_2$  (et en distinguant au besoin le cas où  $a$  est nul), on obtient :  $\alpha = \beta = a$ , soit :  $\forall n \geq 1, D_n = (n+1).a^n$ .

Pour le calcul de  $\Delta_n$ , on pose :  $a = e^{i.\alpha}$ , et :  $b = e^{-i.\alpha}$ , et on distingue à nouveau deux cas :

- si :  $e^{i.\alpha} = e^{-i.\alpha}$ , alors :  $\forall n \geq 1, D_n = (n+1).a^n$ , c'est-à-dire :

si :  $\alpha = 0 \pmod{2.\pi}, \forall n \geq 1, D_n = (n+1)$ ,

si :  $\alpha = \pi \pmod{2.\pi}, \forall n \geq 1, D_n = (n+1).(-1)^n$ .

- si :  $e^{i.\alpha} \neq e^{-i.\alpha}$ , alors :  $\forall n \geq 1, D_n = \frac{e^{i.(n+1).\alpha} - e^{-i.(n+1).\alpha}}{e^{i.\alpha} - e^{-i.\alpha}} = \frac{\sin((n+1).\alpha)}{\sin(\alpha)}$ .

### Déterminant de Vandermonde.

50. a. Si on développe  $P_n$  suivant la dernière ligne, on constate qu'on obtient une somme de termes, chacun étant un produit comportant un signe, un terme type  $X^k$ , et un déterminant extrait, indépendant de  $X$ . Donc  $P_n$  est un polynôme à coefficient dans  $\mathbf{K}$  de degré au plus  $n-1$ .

b. Si deux des  $x_i$  sont égaux, deux lignes dans  $V_n$  sont égales et donc :  $V_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

c. Il est clair que si on évalue  $P_n$  en une valeur  $x_k$  avec :  $1 \leq k \leq n-1$ , alors :  $P_n(x_k) = 0$ , puisque le déterminant comporte alors deux lignes égales.

Donc les  $x_i$  étant distincts 2 à 2, on peut écrire :  $P_n = C.(X - x_1)...(X - x_{n-1})$ , où  $C$  est une constante.

Enfin,  $C$  est le coefficient de  $X^{n-1}$  qui est donc le déterminant extrait obtenu dans le développement de la question a, soit :  $C = V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

d. On a donc (toujours si les  $x_k$  sont distincts 2 à 2) :  $P_n = (X - x_1)...(X - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Donc on en déduit que :  $V_n(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Et si deux des  $x_k$  sont égaux, alors les deux côtés de l'égalité sont nuls : elle est donc valable pour tout n-uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ .

On en déduit alors par récurrence que :  $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

e. Pour retrouver directement la relation précédente, on effectue dans  $V_n(x_1, \dots, x_n)$  les opérations suivantes : on remplace chaque colonne  $C_k$  par  $C_k - x_n.C_{k-1}$ , pour  $k$  de  $n$  à 2 (dans cet ordre).

$$\text{Cela donne : } V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} - x_n \cdot x_1^{n-2} \\ \vdots & x_2 - x_n & & & x_2^{n-1} - x_n \cdot x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & \cdots & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & 0 \end{vmatrix}.$$

On développe alors suivant la dernière ligne puis on factorise sur chaque ligne par  $(x_k - x_n)$ .

Cela donne :  $V_n(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n+1} \cdot (x_1 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n) \cdot V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , soit la même relation que celle obtenue avant puisque :  $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ , que l'on distribue sur chaque terme du produit.

### Déterminants par blocs.

51. Si on calcule le produit  $M.N$ , on obtient :  $M.N = \begin{pmatrix} B.C - A.D & B \\ -C.D + D.C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B.C - A.D & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ .

Puisque la matrice obtenue est triangulaire supérieure par blocs, on obtient :

$$\det(M.N) = \det(B.C - A.D) \cdot \det(D) = (-1)^n \cdot \det(A.D - B.C) \cdot \det(D).$$

De plus :  $\det(N) = \det(-D) = (-1)^n \cdot \det(D)$ .

Donc puisque  $D$  est inversible, on a :  $\det(D) \neq 0$ , et donc on peut simplifier pour aboutir à :

$$\det(M) = \det(A.D - B.C).$$

52. Si on remplace chaque ligne du déterminant de  $M$  (de la 1<sup>ère</sup> à la n<sup>ème</sup>) par :  $L_k + L_{k+n}$ , alors cela revient à remplacer  $A$  par  $A + B$ , et  $B$  par  $A + B$  dans ce déterminant par blocs, ce qui

$$\text{s'écrit : } \det(M) = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix}.$$

Puis on remplace chaque colonne dans ce déterminant (de la  $(n+1)$ <sup>ème</sup> à la  $(2n)$ <sup>ème</sup>) par :  $C_k - C_{k-n}$ , et :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix}, \text{ et donc : } \det(M) = \det(A+B) \cdot \det(A-B), \text{ puisque le dernier déterminant}$$

obtenu est triangulaire inférieur.

### Déterminants, applications linéaires.

53. On peut utiliser la méthode du pivot pour déterminer  $rg(A)$ .

$$rg \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & -46 & 22 & 38 \\ 0 & -23 & 11 & 19 \\ 0 & -23 & 11 & 19 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & -46 & 22 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Donc  $\text{Im}(u)$  est de dimension 2.

Puisque les deux premières colonnes de  $A$  sont libres, elles forment une base de  $\text{Im}(u)$ .

$$\text{Donc : } (x, y, z, t) \in \text{Im}(u), \text{ si et seulement si la matrice } \begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{pmatrix} \text{ est de rang 2.}$$

Cela équivaut à dire que tous les déterminants  $3 \times 3$  extraits sont nuls, soit :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \end{vmatrix} = 0 = 69.x - 46.y + 23.z, \text{ ou encore : } 3.x - 2.y + z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 46x - 23y + 23t, \text{ ou encore : } 2x - y + t = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 23x - 23z + 46t, \text{ ou encore : } x - z + 2t = 0, \text{ et enfin :}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 23y - 46z + 69t, \text{ ou encore : } y - 2z + 3t = 0.$$

Donc :  $(x, y, z, t) \in \text{Im}(u) \Leftrightarrow (3x - 2y + z = 0, 2x - y + t = 0, x - z + 2t = 0, y - 2z + 3t = 0)$ .

54. a. Il est immédiat que  $F$  est inclus dans  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , est non vide puisque la fonction nulle correspond à choisir le polynôme nul, et  $\mathbb{R}[X]$  étant stable par combinaison linéaire,  $F$  l'est aussi.  
 b. Soit :  $f \in F$ , et donc :  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , tel que  $f : x \mapsto e^x.P(x)$ .

Alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x.P(x) + e^x.P'(x) = e^x.(P(x) + P'(x))$ , avec :  $\deg(P + P') \leq n$ .

Donc la dérivation (notons la  $\Delta$  dans  $F$ ) est une application de  $F$  dans  $F$ .

De plus, il est évident qu'elle est linéaire, donc c'est bien un endomorphisme de  $F$ .

Calculons alors sa matrice dans la base « canonique » de  $F$  associée à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Notons pour cela :  $\forall 0 \leq k \leq n, f_k : x \mapsto e^x.x^k$ , et  $\mathcal{F}$  la base de  $F$  ainsi obtenue.

Alors :  $\Delta(f_0) = f_0$ , et :  $\forall 1 \leq k \leq n, \Delta(f_k) = f_k + k.f_{k-1}$ .

$$\text{Donc : } \text{mat}(\Delta, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \det(\Delta) = 1.$$

55. Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}$  considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- a.  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

En effet, on a :  $\mathbb{C} = \text{Vect}(1, i)$ , puisque :

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x.1 + y.i$ , et  $(1, i)$  est bien une base de  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- b. Raisonnons par analyse-synthèse.

Si  $a$  et  $b$  existent alors :  $f(1) = a + b$ , et :  $f(i) = a.i - b.i$ .

On en déduit que :  $a = \frac{1}{2}.(f(1) - i.f(i))$ , et :  $b = \frac{1}{2}.(f(1) + i.f(i))$ .

Réciproquement, pour :  $z = x + i.y$ , avec :  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$a.z + b.\bar{z} = \frac{1}{2}.(f(1) - i.f(i)).(x + i.y) + \frac{1}{2}.(f(1) + i.f(i)).(x - i.y) = x.f(1) + y.f(i) = f(x + i.y) = f(z).$$

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité du couple  $(a, b)$  cherché.

- c. Si on note :  $f(1) = \alpha + i.\beta$ , et :  $f(i) = \alpha'.i + \beta'$ , la matrice de  $f$  dans la base  $(1, i)$  vaut :  $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}$ ,

puis :  $\det(f) = \alpha.\beta' - \alpha'.\beta$ .

De plus :  $a = \frac{\alpha + \beta'}{2} + i.\frac{\beta - \alpha'}{2}$ , et :  $b = \frac{\alpha - \beta'}{2} + i.\frac{\beta + \alpha'}{2}$ , et :

$$|a|^2 = \left(\frac{\alpha + \beta'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha'}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + 2.\alpha.\beta' - 2.\alpha'.\beta), \text{ et :}$$

$$|b|^2 = \left(\frac{\alpha - \beta'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta + \alpha'}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha\beta' + 2\alpha'\beta), \text{ d'où :}$$

$$|a|^2 - |b|^2 = \alpha\beta' - \alpha'\beta = \det(f).$$

### Systemes linéaires.

56. Systeme (S<sub>1</sub>) : on peut calculer le déterminant pour les trois premières équations.

$$\text{Il vaut : } \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2) \cdot (m-1)^2.$$

- Si :  $m \neq 1$ , et :  $m \neq -2$ , les trois premières équations admettent une unique solution qui vaut :  $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ .

Mais cette solution ne vérifie pas la dernière équation et le système complet n'a pas de solution.

- Si :  $m = 1$ , alors le système se ramène à une unique équation :  $x + y + z = 1$ , qui admet une infinité de solutions (formant un plan affine dans  $\mathbb{R}^3$ ).

- Si :  $m = -2$ , alors la somme des trois premières équations donne :  $0 = 0$ , et le système des trois premières équations sont donc compatibles qui admettent comme solutions :

$$(x; y, z) = (x, x+1, x), \text{ avec : } x \in \mathbb{R}.$$

Comme on veut par ailleurs prendre en compte également la dernière équation, on doit aussi avoir :

$$3x+1 = -2, \text{ autrement dit : } x = -1, y = 0, z = -1.$$

Systeme (S<sub>2</sub>) : Le deuxième système a pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.(a-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a).(c-b).(b-a), \text{ (on reconnaît un Vandermonde).}$$

- Si  $a, b, c$  sont distincts deux à deux, alors le système admet une unique solution donnée par les

$$\text{formules de Cramer, donnant par exemple : } x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d.(d-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.(a-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix}} = \frac{(c-d).(c-b).(b-d)}{(c-a).(c-b).(b-a)},$$

de même pour  $y$  et  $z$ .

- Si par exemple :  $a = b \neq c$ , alors le système se ramène à : 
$$\begin{cases} (x+y) + z & = 1 \\ a.(x+y) + c.z & = d \\ a.(a-1).(x+y) + c.(c-1).z & = d.(d-1) \end{cases}.$$

On peut alors résoudre les deux premières équations et voir si la solution trouvée en :  $x' = x + y$ , et  $z$  est solution de la troisième équation.

On peut aussi raisonner autrement, en posant encore :  $x' = x + y$ , et dire que si le dernier système a une

$$\text{solution, alors le système : } \begin{cases} x'+z+1.(-1) & = 0 \\ a.x'+c.z+d.(-1) & = 0, \text{ a une solution non nulle } (x', z, -1). \\ a^2.x'+c^2.z+d^2.(-1) & = 0 \end{cases}$$

Donc son déterminant est nul et comme c'est un Vandermonde, c'est qu'on a :  $a = d$ , ou :  $c = d$ .

On distingue alors trois sous-cas ici :

si :  $d \neq a$ , et :  $d \neq c$ , alors le système n'a pas de solution.

$$\text{si : } d = a, \text{ alors le système se ramène à : } \begin{cases} (x'-1) + z & = 0 \\ a.(x'-1) + c.z & = 0, \text{ et comme : } a \neq c, \text{ ce système a une} \\ a^2.(x'-1) + c^2.z & = 0 \end{cases}$$

unique solution :  $x'-1 = z = 0$ , soit finalement  $(x, 1-x, 0)$  comme solutions pour le système initial.

si :  $d = c$ , alors le système se ramène à : 
$$\begin{cases} x'+(z-1) & = 0 \\ a.x'+c.(z-1) & = 0, \text{ et à nouveau, comme : } a \neq c, \text{ ce} \\ a^2.x'+c^2.(z-1) & = 0 \end{cases}$$

système a une unique solution :  $x' = z - 1 = 0$ , soit finalement  $(x, -x, 1)$  comme solutions pour le système initial.

• Si enfin :  $a = b = c$ , le système se ramène à : 
$$\begin{cases} (x + y + z) & = 1 \\ a.(x + y + z) & = d \\ a.(a-1).(x + y + z) & = d.(d-1) \end{cases}.$$

Deux sous-cas se présentent :

si :  $a \neq d$ , il n'y a pas de solution,

si :  $a = d$ , il y a un plan affine de solutions qui est l'ensemble des triplets vérifiant :  $x + y + z = 1$ .

57. Puisque ce système est un système homogène, il y a toujours une solution qui est  $(0,0,0)$ .

Ce système admet donc une autre solution si et seulement si ça n'est pas un système de Cramer, autrement dit si et seulement si son déterminant est nul.

Or ce déterminant vaut : 
$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -(m+1) & -1 \\ m & 2 & -(3m+2) \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9m^2 + 7m + 8.$$

Comme le discriminant de ce trinôme vaut  $-239$ , si on travaille dans  $\mathbb{R}$ , ce déterminant ne s'annule pas et le système a toujours une unique solution qui est  $(0,0,0)$ .

Si on est dans  $\mathbb{C}$ , il y a deux valeurs de  $m$  qui sont :  $\frac{-7 \pm i\sqrt{239}}{18}$ , pour lesquelles il y a d'autres solutions au système que  $(0,0,0)$ .

### Calcul de rang de matrice.

58. On peut développer  $\det(M(\alpha))$  suivant la première ligne, et :  $\det(M(\alpha)) = 1 + (-1)^{n+1}.\alpha^n = 1 - (-\alpha)^n$ .

Le rang de  $M(\alpha)$  dépend dans un premier temps de la nullité (ou pas) de  $\det(M(\alpha))$ .

• Si :  $\exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = -e^{\frac{2.i.k.\pi}{n}}$ , alors :  $\det(M(\alpha)) = 0$ , et :  $rg(M(\alpha)) < n$ .

Dans ce cas, la sous-matrice de taille  $(n-1) \times (n-1)$  extraite en haut à gauche de  $M(\alpha)$  est inversible (car triangulaire inférieure de déterminant égal à 1), donc  $M(\alpha)$  est de rang au moins  $(n-1)$ .

Finalement, dans ce cas,  $rg(M(\alpha)) = n-1$ .

• Si  $\alpha$  n'est pas une racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité, alors :  $\det(M(\alpha)) \neq 0$ , et :  $rg(M(\alpha)) = n$ .