Théorème de Lucas

Edouard Lucas est né en 1842 et mort en 1891.

Soit P polynôme complexe donné de degré n au moins égal à 2. On veut localiser les zéros de P' par rapport aux zéros de P.

1) Décomposition de $\dfrac{P'}{P}$.

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n au moins égal à 1. Posons $P = K\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$ où les z_k sont les racines de P dans $\mathbb{C}$ non nécessairement deux à deux distinctes et $K = \text{dom}(P)$ est un complexe non nul. On a

$$P' = K\sum_{j=1}^{n}(X - z_1)\dots(X - z_j)'\dots(X - z_n) = \sum_{j=1}^{n}K\prod_{k\neq j}(X - z_k) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P}{X - z_j},$$

et donc

Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré au moins égal à 1. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X - z_j}$$

où n est le degré de P et les z_k sont les n racines de P dans $\mathbb{C}$ non nécessairement deux à deux distincts.

Les z_k n'étant pas nécessairement deux à deux distincts, le membre de droite de l'égalité précédente n'est pas nécessairement la décomposition en élément simple de $\dfrac{P'}{P}$. En regroupant les fractions de même dénominateur, on obtient la décomposition en élément simple de $\dfrac{P'}{P}$ à savoir

Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2.
En posant $P = K\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{\alpha_k}$ où K est un complexe non nul,
les z_k sont les racines deux à deux distinctes de P dans $\mathbb{C}$ et les α_k sont des entiers naturels non nuls,
la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{X - z_k}.$$

2) Théorème de Lucas.

On va montrer que, P étant un polynôme complexe de degré au moins égal à 2, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Soit z une racine de P' qui n ?est pas une racine de P. D'après 1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z - z_k} = \frac{P'(z)}{P(z)} = 0.$$

En rendant réels les dénominateurs puis en conjugant on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0$ ou encore

$$z = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k} \text{ où } \lambda_k = \frac{1}{|z - z_k|^2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi, quand z est une racine de P' qui n ?est pas une racine P, z est un barycentre à coefficients réels positifs des racines de P. Ce résultat reste clair quand z est un zéro (multiple) de P et donc

Théorème de Lucas. Soit P un polynôme complexe de degré au moins 2.
Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P,
ou encore les racines de P' sont des barycentres à coefficients réels positifs des racines de P.

