

Résumé du cours d'analyse de Sup et Spé

1 Topologie

1.1 Normes, normes équivalentes

Une norme sur le \mathbb{K} -espace vectoriel E est une application N de E dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, N(x) \geq 0 & \text{ (positivité)} \\ \forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0) & \text{ (axiome de séparation)} \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x) & \text{ (homogénéité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) & \text{ (inégalité triangulaire)}. \end{aligned}$$

Normes équivalentes. Les normes N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels **strictement** positifs α et β tel que $\forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$. Il revient au même de dire que la fonction $\frac{N'}{N}$ est bornée sur $E \setminus \{0\}$.

Théorème. Si E est de dimension finie sur \mathbb{K} , toutes les normes sont équivalentes.

1.2 Voisinage

Soit $x \in E$. Un voisinage de x est une partie de l'espace vectoriel normé (E, N) qui contient une boule ouverte non vide de centre x .

L'ensemble des voisinages de x se note $\mathcal{V}(x)$. Si V est une partie de E , $(V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists r > 0 / B_o(x, r) \subset V)$.

Théorème. Une réunion quelconque de voisinage de x est un voisinage de x . Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x .

1.3 Ouverts, intérieur.

Ouvert. Un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) est soit \emptyset , soit une partie non vide de E voisinage de chacun de ses points. Si O est une partie non vide de E , $(O \text{ est ouvert} \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists r > 0 / B_o(x, r) \subset O)$.

Théorème. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Intérieur. Un élément x de $A \neq \emptyset$ est intérieur à A si et seulement si A est voisinage de x . ($\forall x \in E, (x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x))$). L'intérieur d'une partie non vide A est l'ensemble des points de A dont A est voisinage.

Théorème. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Théorème. A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

1.4 Fermés, adhérence

Fermé. A est fermé si et seulement si le complémentaire de A est ouvert.

Théorème. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème (caractérisation séquentielle des fermés). Une partie non vide A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A .

Adhérence. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A . $\forall x \in E, (x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset)$. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A .

Théorème. \bar{A} est le plus petit fermé contenant A .

Théorème. A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Théorème. x est adhérent à $A \neq \emptyset$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergente de limite x .

\emptyset et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

1.5 Compacts

Une partie non vide K de E est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K . \emptyset est compact par convention.

Théorème. Si K est compacte, K est fermée et bornée.

Théorème (de BOREL-LEBESGUE). Si (E, N) est un evn de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.

Théorème (de BOLZANO-WEIERSTRASS). Si (E, N) est un evn de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2 Fonctions

2.1 Connexité par arcs

Définition. Soit A une partie non vide de E . A est connexe par arcs si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans E telle que

- $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$;
- $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in A$.

Théorème. Un convexe non vide est connexe par arcs.

2.2 Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une application d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') . Si f est continue sur E , l'image d'un connexe par arcs de E est un connexe par arcs de E' .

En particulier, si f va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et est continue sur \mathbb{R} , l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par f est un intervalle de \mathbb{R} .

Théorème (images réciproques d'ouverts ou de fermé). f va d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') . f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E', N') est un ouvert de D , c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de E avec D .

f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (E', N') est un fermé de D , c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de E avec D .

Théorème (image continue d'un compact). f va d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') . Si f est continue sur D , l'image directe d'un compact de D est un compact de (E', N') .

En particulier, si f va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et est continue sur \mathbb{R} , l'image d'un segment de \mathbb{R} par f est un segment de \mathbb{R} .

Théorème de HEINE. Si f est continue sur un compact, alors f est uniformément continue sur ce compact.

Théorème (continuité de la norme). L'application $N : (E, N) \rightarrow (\mathbb{R}, ||)$ est continue.

$$\begin{array}{ccc} (E, N) & \rightarrow & (\mathbb{R}, ||) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$$

Théorème (continuité d'une application linéaire). f est une application linéaire de $(E, ||_E)$ dans $(F, ||_F)$.

f est continue sur E si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, ||f(x)||_F \leq k ||x||_E$.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire, forme linéaire, application multilinéaire ... est continue sur E .

Conséquence. Les sev d'un evn de dimension finie sont fermés.

2.3 Dérivation

Théorème de ROLLE. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Le théorème de ROLLE et le théorème des accroissements finis sont faux pour les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} ou les applications de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Théorème. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si f est continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b[$ et si f' a une limite réelle ou complexe en a , alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

Formule de TAYLOR-LAPLACE. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Inégalité des accroissements finis. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , dérivable sur I . On suppose que $|f'|$ est majorée par le réel M sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $n + 1$ fois dérivable sur I . On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par le réel M_{n+1} sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1} (b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

2.4 Intégration

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors, pour tout x_0 de I , la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

3 Séries numériques

Règle de d'ALEMBERT. (u_n) est une suite complexe, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ a une limite $l \in [0, +\infty]$.

- Si $0 \leq l < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.
- Si $l > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes. Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ converge et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Critère spécial aux séries alternées (ou théorème de LEIBNIZ). Soit (u_n) une suite réelle alternée en signe, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge.

De plus, S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et leur valeur absolue est majorée par la valeur absolue de leur premier terme.

Théorème (séries télescopiques). Soit (a_n) une suite complexe. La suite (a_n) et la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ sont de même nature.

Comparaison séries-intégrales. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ converge.

En particulier, la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème (somme des relations de comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement **positives** telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général b_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes).

Si la série de terme général a_n diverge, alors la série de terme général b_n diverge et

$$\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n b_k$$

(règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes).

Théorème de FUBINI. Soit $(u_{i,j})$ une suite complexe double. Si Pour tout i , la série de terme général $u_{i,j}$ est absolument convergente et que $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right) < +\infty$, alors la suite $(u_{i,j})$ est sommable et de plus, $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right)$.

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

1) Convergence simple, uniforme

(f_n) converge simplement sur D vers f si et seulement si, pour chaque x de D , la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

(f_n) converge uniformément vers f sur D si et seulement si la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Intersion des limites

Théorème d'intersion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).

Si chaque f_n a une limite ℓ_n (réelle, complexe) quand x tend vers a et si (f_n) converge uniformément vers f sur D , alors :

- f a une limite quand x tend vers a ;
- la suite (ℓ_n) converge;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$).

Ce théorème marche aussi si les ℓ_n sont $+\infty$ ($-\infty$) à partir d'un certain rang.

3) Continuité.

Théorème. Si (f_n) converge uniformément vers f sur D et si chaque f_n est continue sur D , alors f est continue sur D (une limite uniforme de fonctions continues est continue)

4) Dérivation.

Théorème. Si

- (f_n) converge simplement vers f sur D ;
- chaque f_n est dérivable sur D ;
- la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur D (vers sa limite).

Alors, f est dérivable sur D et $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$ (c'est-à-dire $\frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n \right)$).

Théorème (généralisation). Si

- (f_n) converge simplement vers f sur D ;
- chaque f_n est de classe C^p , $1 \leq p \leq +\infty$ sur D ;
- les suites des dérivées $(f_n^{(k)})$, $1 \leq k \leq p$, convergent toutes uniformément sur D (vers leur limite).

Alors, f est de classe C^p sur D et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$.

5) Intégration

Théorème (convergence uniforme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :

- f est continue par morceaux sur D ;
- la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge;
- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ (c'est-à-dire $\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$).

Théorème de convergence dominée. (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur

I et $\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$.

4.2 Séries de fonctions

1) Convergence simple, uniforme, absolue, normale

La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers S si et seulement si, pour chaque x de D , la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers $S(x)$.

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers S si et seulement si la suite $(\|R_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D si et seulement si, pour chaque x de D , la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.

La série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D (vers S) si et seulement si la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

2) Interversion des limites

Théorème d'interversion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).

Si chaque f_n a une limite ℓ_n quand x tend vers a et si la série de fonction de terme général f_n converge uniformément vers S sur D , alors :

- S a une limite quand x tend vers a ;
- la série numérique de terme général ℓ_n converge ;
- $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

3) Continuité

Théorème. Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur D et si chaque f_n est continue sur D , alors S est continue sur D .

4) Dérivation terme à terme

Théorème de dérivation terme à terme. Si

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D ,
- chaque f_n est dérivable sur D ,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur D ,

alors, S est dérivable sur D et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$

Théorème (généralisation). Si

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D ,
- chaque f_n est de classe C^p , $1 \leq p \leq +\infty$ sur D ,
- les séries de termes généraux $(f_n^{(k)})$, $1 \leq k \leq p$, convergent toutes uniformément sur D ,

alors, S est de classe C^p sur D et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Revoir l'étude de la fonction ζ de RIEMANN.

5) Intégration terme à terme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la série de terme général f_n converge uniformément vers S sur $[a, b]$, alors :

- S est continue par morceaux sur $[a, b]$;
- la série de terme général $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge ;
- $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Théorème d'intégration terme à terme. Si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I , si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$, alors S est

intégrable sur I et $\int_I S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

5 Séries entières

1) **Rayon de convergence** $R_a = \sup\{r \in [0, +\infty[/ (|a_n|r^n) \text{ bornée}\}$.

2) Convergence normale

Théorème. $\sum a_n r^n$ converge normalement sur tout $[-r, r]$ (resp. tout disque fermé de rayon r) où $r < R_a$.

Théorème. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Idem pour primitive par intégration terme à terme. Les différents rayons de convergence considérés sont égaux.

Théorème. Si pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

6 Intégrales dépendant d'un paramètre

I est une partie de \mathbb{R} et J est un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

$f: I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables, définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_J f(x, t) dt$.

Théorème de passage à la limite sous le signe somme. Soit a adhérent à D . Si

- pour tout x de I , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- pour tout t de J , la fonction $x \mapsto f(x, t)$ a une limite $\ell(t)$ quand x tend vers a , où ℓ est une fonction continue par morceaux sur J ,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors,

- la fonction F a une limite quand x tend vers a ,
- la fonction ℓ est intégrable sur J ,
- $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_J \ell(t) dt$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} \int_J f(x, t) dt = \int_J \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) \right) dt$).

Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. Si

- pour tout x de I , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- pour tout t de J , la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est définie et continue sur I .

Théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de LEIBNIZ)

Si pour tout x de I , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I ,

et si f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire

- pour tout x de I , la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- pour tout t de J , la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} f(x, t)$ est continue sur I ,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Théorème de dérivation sous le signe somme généralisé

Si pour tout x de I , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I , et si f admet des dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ jusqu'à l'ordre p , $1 \leq k \leq p \leq +\infty$, vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k} f(x, t)$ est continue sur I ,
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe une fonction φ_k continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout

$$(x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Revoir l'étude de la fonction Γ .

7 Equations différentielles

Théorème de CAUCHY linéaire : cas des équations différentielles scalaires du premier ordre. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ à savoir :

$$\forall x \in I, f(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \text{ où } A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Théorème de CAUCHY linéaire : cas des systèmes du premier ordre à coefficients constants. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir

$$\forall t \in I, X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du.$$

Théorème de CAUCHY linéaire : cas général. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$.

Théorème de CAUCHY linéaire : cas des équations différentielles scalaires du second ordre. Soient a , b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.