Programme de mathématiques de la classe préparatoire MP

1 Préambule

1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (MP) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :
– l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
– le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
– l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
– le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Les élèves doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique.

Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés de TIPE) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulierement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxème année MP est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotées 1, 2, . . .). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels et les capacités attendues des élèves, et délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme défini un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amène de développer. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans diffrents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte essentiellement sur l'algèbre, l'analyse et les probabilités. L'étude de chacun de ces trois domaines permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Le programme d'algèbre comprend trois chapitres. Le premier formalise les différentes structures algébriques usuelles rencontrées dans le programme et introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient ; on y aborde aussi l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Le deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en classe de première année MPSI et aboutit à la réduction des endomorphismes et des matrices ; cette étude est basée sur les notions de sous-espace stable et de polynôme d'endomorphisme ; les principaux résultats y sont formulés en termes d'éléments propres et de polynômes annulateurs. Le troisième, consacré aux espaces préhilbertiens réels, prolonge l'étude de ces espaces déjà abordée en MPSI et abouti, en dimension infinie, à l'étude des familles orthonormales totales et en dimension finie à la réduction, en base orthonormale, des endomorphismes symétriques (théorème spectral) et des isométries vectorielles ; cette étude met l'accent sur les relations entre les registres vectoriel, matriciel et géométrique.

En analyse, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé, ce qui permet d'aborder le calcul différentiel et fourni un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries entières et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude du calcul différentiel et des équations diffrentielles linéaires tiennent une place majeure. Le programme comporte aussi une introduction aux fonctions holomorphes.

L'étude de la topologie d'un espace vectoriel normé permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs. L'étude des familles sommables de nombres complexes vise la mise en place des outils nécessaires à une présentation rigoureuse des espaces probabilisés et à l'étude des variables aléatoires discrètes.

Le chapitre relatif aux fonctions vectorielles permet la généralisation aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie des résultats d'analyse réelle (dérivation et intégration sur un segment) étudiés en première année ; on y aborde auussi une étude modeste des arcs paramétrés. Il favorise les interprétations et les représentations géométriques des objets étudiés, et fourni une occasion de relier les registres analytique et géométrique.

L'étude des suites et séries de fonctions et des différents mode de leur convergence conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme ; ces théorèmes sont ensuite appliqués notamment pour étudier la fonction exponentielle dans une algèbre normée de dimension finie ; cette étude se termine par l'énoncé de deux théorèmes d'approximation. Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir des outils pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour l'étude des fonctions holomorphes.

Le chapitre relatif au calcul différentiel est étudié dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. La différentielle en un point est définie de manire intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Parallèlement à cette vision algébrique et géométrique, ce chapitre fournit aussi des outils opérationnels pour la résolution de problèmes (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles).

Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre sont étudiés dans un seul chapitre ; ils fournissent les outils nécessaires pour mener l'étude d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre.

L'étude des équations et des systèmes différentiels linéaires, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques, est basée sur le théorème de Cauchy qui permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de l'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet notamment d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de matrice, et de mettre en œuvre des techniques de réduction.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris et approfondi dans le cursus post classes préparatoires. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes et celle des variables à densité, ce qui permet d'élargir le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

On y étudie les bases de la théorie des probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, notions d'indépendance et de probabilités conditionnelles, notions de moments et de fonctions génératrices ; ce chapitre débouche sur des résultats d'approximation (loi faible des grands nombres, théorème de la limite centrée). La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli. L'inégalité qui la sous-tend (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion. Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices et l'intégration sur un intervalle quelconque.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle. Certaines notions de géométrie affine et euclidienne étudiées en classe de première année MPSI sont reprises dans un cadre plus général.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année MP est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la preimère période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité, d'algèbre et de géométrie euclidienne.

1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité [1] des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. " Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (≪ Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. ≫)

2 Première période

2.1 Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année MPSI : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens.

Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année MPSI, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

2.1.1 Structure de groupe

Groupe. Produit fini de groupes.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
Sous-groupe ; caractérisation d'un sous-groupe.	Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Groupe monogène, groupe cyclique.	Exemples : Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; groupe des racines n-ièmes de l'unité. Exemples de parties génératices du groupe S_n. Les réflexions engendrent le groupe des isométries vectorielles en dimension 2.
Morphisme de groupes.	Exemples : signature, déterminant.
Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme.	Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme	Tout groupe monogne infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$; tout groupe monogène fini (cyclique) de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
Élément d'ordre fini d'un groupe G, ordre d'un tel élément.	Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x^k = e \Longleftrightarrow d \mid k$.	
Dans un groupe fini G, tout élément est d'ordre fini, en plus cet ordre divise le cardinal du groupe.	Démonstration dans le cas G commutatif.

2.1.2 Structure d'anneau, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau. Produit fini d'anneaux.	Les anneaux sont supposés unitaires.
Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme d'anneaux. Isomorphisme d'anneaux.	
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les corps sont supposés commutatifs.
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	Idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier.
Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	Application aux systèmes de congruences.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.	
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en premiŕe année MPSI.

2.1.3 Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe et le suivant, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Idéaux de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.	
PGCD de deux polynômes.	Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie.
Relation de Bézout. Lemme de Gauss.	Algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche des coefficients de Bézout.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Décomposition d'un élément de $\mathbb{K}[X]$ en produit d'irréductibles unitaires : existence et unicité.	Les élèves doivent connaître les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.

2.1.4 Structure d'algèbre

Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

2.2 Topologie des espaces normés

Ce chapitre prolonge les notions de limites, de suites, de séries et de fonctions étudiées en première année MPSI ; il introduit la topologie des espaces vectoriels normés, ce qui permet de fournir un cadre cohérent pour l'étude de ces notions à un niveau suppérieur. Les concepts étudiés ici se prêtent à des représentations issues de différents registres ; dans ce cadre, on tâchera de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment en ayant recours à de nombreuses figures.

Ce chapitre vise quatre objectifs :

- *introduire, dans le cadre des espaces normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *introduire les notions de compacité et de connexité par arcs dans un espace normé ;*
- *établir l'équivalence des normes en dimension finie et en tirer des conséquences (caractérisation de la compacité et de la convergence d'une suite bornée, continuité des applications linéaires et multilinéaires ...) ;*

- *donner, à travers l'étude des espaces normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, suites et séries de fonctions, équations différentielles linéaires).*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *aient une bonne connaissance des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et sur les espaces de suites, de matrices et de fonctions, sachent en établir les propriétés et soient capables de les comparer ;*
- *acquièrent les notions de base sur l'étude locale d'une fonction, les notions de compacité et de connexité par arcs, et connaissent les propriétés globales des fonctions continues ;*
- *sachent exploiter la densité pour établir des relations entre fonctions continues ;*
- *soient capables d'exploiter les propriétés de compacité et de connexité par arcs notamment en dimension finie.*

Hormis les définitions et quelques exemples simples, l'étude générale de la notion de suite de Cauchy et celle d'espace de Banach est hors programme ; ces notions sont introduites à titre d'information pour préparer les élèves aux cursus post classes préparatoires.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2.1 Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espaces vectoriels normés.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire. Distance à une partie.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	
Parties, suites et fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes usuelles $\\| \ \\|_1$, $\\| \ \\|_2$ et $\\| \ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Normes usuelles $\\| \ \\|_1$, $\\| \ \\|_2$ et $\\| \ \\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	$\\|A\\|_1 = \sup\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_{i,j}\|$, $\\|A\\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{p} \|a_{i,j}\|$, $\\|A\\|_2 = \Big(\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \|a_{i,j}\|^2 \Big)^{1/2}$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si X est un ensemble, norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$.	Norme dite infinie ou uniforme.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	Norme produit.

2.2.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

2.2.3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée et une sphère sont fermées.
Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif. Caractérisation séquentielle des fermés de A.	

2.2.4 Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite et des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des élèves.

2.2.5 Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions de la notion de limite : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$; limite de $f(x)$ quand x tend vers$+\infty$ ou vers $-\infty$, lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$; limite infinie en a adhérent à A pour une application à valeurs réelles.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces normés.	
Opérations algébriques sur les limites.	
Limite d'une composée.	
Continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Applications continues. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les élèves doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes ; uniforme continuité des applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, B)$ où B est une partie d'un espace vectoriel normé.
Si u est une application linéaire d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, la continuité de u équivaut à l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\\|u(x)\\| \leq C\\|x\\|$.	Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.

2.2.6 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition d'une partie compacte K par la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'élément de K possède une valeur d'adhérence dans K.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.	
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.	
Produit d'une famille finie de compacts.	
Image d'une partie compacte par une application continue.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
Théorème de Heine.	Toute application continue sur une partie compacte est uniformément continue.

2.2.7 Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Arc (ou chemin continu) joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs de la partie A.
Parties connexes par arcs.	Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

2.2.8 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Caractérisation de la convergence dans un espace de dimension finie à l'aide d'une base.	Les élèves doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans un espaces normé F est continue.
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces normés de dimensions finies.

Exemple : déterminant.

2.2.9 Propriété de Cauchy pour les suites

Suites de Cauchy dans un espace vectoriel normé. Toute suite convergente est de Cauchy. Définition d'un espace vectoriel normé complet (espace de Banach).

La notion de suite de Cauchy est introduite à titre d'information ; elle sera développée dans les cursus post classes préparatoires.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et, plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie sont complets.

Exemple d'espace vectoriel normé non complet.

2.3 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ce chapitre a un triple objectif :

- *consolider et approfondir les acquis de la classe de première anné MPSI relatifs à l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire notamment en dimension finie ;*
- *étudier la réduction des endomorphismes et des matrices ;*
- *exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.*

Les méthodes qui y sont présentées sont de deux types : les unes, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les autres, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *acquièrent les notions de base sur la réduction des endomorphismes et des matrices (éléments propres, sous-espoace stable, polynôme d'endomorphisme et de matrice, polynôme annulateur) ;*
- *puissent mettere en œuvre ces notions pour mener l'étude, dans des cas standard, de la diagonalisation et la trigonalisation des matrices et des endomorphismes, en dimension finie ;*
- *soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.*

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où le corps de base $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

On se limitera dans la pratique au cas où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.3.1 Sous-espaces stables ; éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Rappels sur les matrices semblables.	Interprétation géométrique. Les élèves doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace F stable par un endomorphisme u de E. Endomorphisme u_F de F induit par u. Somme et intersection de sous-espaces stables par u.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base de E adaptée à F ; caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.	Un vecteur propre est non nul.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.	En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par v.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{L}$.

2.3.2 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude. Notations χ_u, χ_A. Le polynôme caractéristique est unitaire ; valeurs des coefficients des monômes de degrés 0 et $n-1$ dans χ_u, χ_A.
Les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.	Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ.
Si le polynôme caractéristique χ_u est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité, sont égaux à la trace et au déterminant de u respectivement.	
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	

2.3.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.

Cas des projecteurs, des symétries.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé soit diagonalisable.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

Traduction matricielle.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Traduction matricielle.

2.3.4 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Interprétation géométrique.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ ou $n = 3$.

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Interprétation dans le registre matriciel.
Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Cas particulier : Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes.

Indice de nilpotence.

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

2.3.5 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal, alors la famille $(u^k)_{0\leq k\leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si $u(x)=\lambda x$ et $P\in\mathbb{K}[X]$, alors $P(u)(x)=P(\lambda)x$.	Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.
Théorème de décomposition des noyaux : Si $P_1,\dots,P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors $$\mathrm{Ker}(P(u))=\mathrm{Ker}(P_1(u))\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(P_r(u)).$$	

2.3.6 Application à la réduction de la notion de polynôme annulateur

Famille $(p_1,\dots,p_r)$ des projecteurs associés à une décomposition de E de la forme $E=F_1\oplus\cdots\oplus F_r$.	Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable u dont les sous-espaces propres sont $F_1,\dots,F_r$: $u=\lambda_1p_1+\cdots+\lambda_rp_r$; pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $P(u)=P(\lambda_1)p_1+\cdots+P(\lambda_r)p_r$.
Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples.	Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

2.4 Séries dans un espace normé de dimension finie ; familles sommables

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces normés de dimension finie, en particulier aux espaces d'endomorphismes et de matrices ; ce qui permet de compléter et consolider les acquis de première année MPSI relatifs aux séries numériques ;*
- *définir l'exponentielle d'endomorphismes et de matrices carées ;*
- *introduire la notion d'ensemble dénombrable et de famille sommable de nombres réels ou complexes indexée par un tel ensemble ; cette notion sera utile notamment pour l'étude des probabilités.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves acquièrent des notions de base sur les séries d'éléments d'un espace normé de dimension finie et la sommabilité notamment en vue d'étudier les problèmes d'interversion de sommation.

2.4.1 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Il est recommandé de faire des rappels de cours et des exercices de révision sur les séries numériques avant d'entamer l'étude des séries dans un espace normé de dimension finie.

Série d'éléments d'un espace normé de dimension finie. Sommes partielles. Convergence, divergence.	$\sum_n u_n$ désigne la série de terme général u_n, on dit aussi série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Somme et restes d'une série convergente.	Lorsqu'une série $\sum_n u_n$ est convergente, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ désigne son reste d'order n.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.	
Lien entre suite et série.	La suite $(u_n)_n$ et la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente ; inégalité triangulaire.	Le critr̀e de Cauchy est hors programme.
Cas d'une algèbre normée de dimension finie : série géométrique de Neumann, application exponentielle dans une telle algèbre. Cas particuliers d'un nombre complexe, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie, d'une matrice carrée réelle ou complexe. Notations $\exp(a)$, e^a pour $a \in \mathcal{A}$ et $\exp(A)$, e^A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie ayant e pour élément unité alors : - si $a \in \mathcal{A}$ est tel que $\|a\| < 1$, la série géométrique de Neumann $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ $(a^0 := e)$ est absolument convergente, $e-a$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. - de même, pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente ; sa somme se note $\exp u$ et s'appelle l'exponentielle de u : $$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

2.4.2 Familles sommables de nombres complexes

On introduit ici la notion d'ensemble dénombrable et de famille sommable, de nombres réels ou complexes, indexée par un tel ensemble. Il s'agit d'une extension de la notion de série absolument convergente basée sur le fait que pour une telle série, la structure d'ordre de $\mathbb{N}$ n'intervient pas pour en calculer la somme.

Ensemble dénombrable, au plus dénombrable.	Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$; il est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$ est dénombrable ; les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Une réunion finie ou dénombrable densembles dénombrables (resp. au plus dénombrables) est dénombrable (resp. au plus dénombrable).

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration non exigible.

Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble au plus dénombrable I. Somme.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} u_i$, où J décrit l'ensemble des parties finies de I, est majoré, auquel cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à la somme de la famille ; dans le cas où la famille n'est pas sommable, il est pratique de convenir que sa somme est égale à $+\infty$.
Dans tous les cas, la somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.

Critère de comparaison.

Si $0 \leq u_i \leq v_i$, pour tout $i \in I$, alors :
- la sommabilté da la famille $(v_i)_{i\in I}$ entraîne celle de $(u_i)_{i\in I}$ et on a $0 \leq \displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$.
- la non sommabilté de la famille $(u_i)_{i\in I}$ entraîne la non sommabilté de $(v_i)_{i\in I}$.

Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs indéxée par un ensemble dénombrable I et $\sigma : \mathbb{N} \to I$ une bijection, alors, la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n v_{\sigma(n)}$ est convergente, auquel cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} v_i$.

Théorème de sommation par paquets (cas d'une famille de réels positifs) : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, alors, pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right).$$

Démonstration hors programme.

Famille sommable de nombres réels ou complexes indexée par un ensemble au plus dénombrable.

La famille $(u_k)_{k\in I}$ est dite sommable si la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ l'est.

Somme d'une telle famille (cas réel, cas complexe).

Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est réelle, sa somme est définie comme étant la différence des sommes des familles, de réels positifs, composées par ses parties positive et négative :

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^- ;$$

dans le cas général, sa somme est définie par

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k).$$

Lorsque $I = \mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum_n u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, auquel cas $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indéxée par un ensemble dénombrable I et $\sigma : \mathbb{N} \to I$ une bijection, alors, la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n v_{\sigma(n)}$ est convergente, auquel cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} v_i$.

Espace vectoriel des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; linéarité de la somme, inégalité triangulaire. Sous famille d'une famille sommable.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors

$$\Big|\sum_{i\in I} u_i\Big| \leq \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Théorème de sommation par paquets : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes et soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable de somme $s_n = \sum_{i\in I_n} u_i$; la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Démonstration hors programme.

Critère suffisant de sommabilité.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ en appliquant le théorème de sommation par paquets, énoncé pour les familles de réels positifs, à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

Cas des suites doubles ; interversion des sommations :
- la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est sommable si, et seulement si, pour tout n, la série $\sum_m a_{m,n}$ converge et la série $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge , auquel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

qui vaut aussi la somme de la famille.
- si la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de complexes est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

qui vaut aussi la somme de la famille.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le résultat précédent à la famille $(|u_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Définition du produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes.

La série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est appelée la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ l'est aussi et la famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ qui vaut aussi la somme de la famille $\Big(a_p b_q\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

Application : si u et v sont deux éléments commutables d'une algèbre normée de dimension finie $\mathcal{A}$, alors $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.

Si $S_n(w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!}$, $w \in \mathcal{A}\cup\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\|S_n(u)S_n(v) - S_n(u+v)\| \leq S_n(\|u\|)S_n(\|v\|) - S_n(\|u\|+\|v\|).$$

2.5 Fonctions vectorielles d'une variable réelle, arcs paramétrés

Ce chapitre poursuit quatre objectifs :

- *Consolider les acquis de première année MPSI concernant la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes et étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ;*
- *préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;*
- *définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans un espace normé de dimension finie, en établir les principales propriétés puis en déduire l'inégalité des accroissements finis et les formules de Taylor ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et le calcul différentiel.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *connaîssent et sachent exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point ;*
- *soient capables de mener l'étude de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie et en particulier d'en établir les propriétés liées à la continuité, à la dérivabilité et à la classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$;*
- *connaîssent la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange) ;*
- *sachent déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.*

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie F.

2.5.1 Dérivation

Dérivabilité d'une fonction en un point. Dérivabilité à droite et à gauche.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique, vitesse instantanée.
Caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'une base de F ; expression des composantes de la dérivée en un point. Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée.	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables, linéarité de la dérivation.	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $L \circ f$ où L est une application linéaire de F dans un espace vectoriel de dimension finie.	$(L \circ f)' = L \circ f'$.
Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B\left(f(t), g(t)\right)$ où B est une application bilinéaire ; cas du produit scalaire et du carré de la norme d'un espace euclidien.	Si $(F, (.\|.))$ est un espace euclidien et $\\| \ \\|$ sa norme euclidienne, la dérivée de $t \mapsto (f(t)\|g(t))$ est l'application $t \mapsto (f'(t)\|g(t)) + (f(t)\|g'(t))$, celle de $t \mapsto \\|f(t)\\|^2$ est $t \mapsto 2(f'(t)\|f(t))$.
Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	$(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$.
Applications k fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.	Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération. Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, algbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs rélles ou complexes, $0 \leq k \leq +\infty$.
Dérivée k-ième d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B\left(f(t), g(t)\right)$, B étant une application bilinéaire : si f et g sont k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) alors $B(f, g)$ l'est aussi. Expression de la dérivée k-ième de $B(f, g)$: formule de Leibniz.	$\left(B(f,g)\right)^{(k)}(t) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B\left(f^{(p)}(t), g^{(k-p)}(t)\right),\ t \in I.$

La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f : I \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une application φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

2.5.2 Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriétés de l'intégrale : linéarité, additivité (relation de Chasles), composition par une application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie.

Si L est une application linéaire de F dans un espace vectoriel de dimension finie alors $L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$.

Inégalité triangulaire : $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

On peut établir cette inégalité, évidente pour les fonctions en escalier, en admettant le résultat d'approximation de f, uniformément sur $[a, b]$, par une suite de fonctions en escalier.

Sommes de Riemann associées à une subdivision de pas constant.

Si $f : [a, b] \to F$ est continue par morceaux, alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.
Théorème fondamental du calcul intégral : toute fonction continue sur un intérvalle possède une primitive. Techniques de calcul de primitives notamment dans le cas des fonctions numériques.

f étant une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. De plus pour toute primitive G de f sur I

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $\|f'(t)\| \leq M$, pour tout $t \in [a, b]$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M\,(b - a)$.

Formules de Taylor avec reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Le résultat de Taylor-Young est local, contrairement aux autres résultats. Les hypothèses des résultats globaux sont plus fortes.

2.5.3 Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, à valeurs dans F. Support de l'arc (ou courbe associée). Multiplicité d'un point du support. Paramètre régulié. Tangente en un point associé à un paramètre régulier ; normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

Interprétation cinématique des dérivées d'ordre 1 et 2.

Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme de deuxième année.

2.6 Suites et séries de fonctions

Ce chapitre vise deux objectifs :

- *définir les modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions) ;*
- *exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite (interversion des limites, continuité, dérivation, intégration) ainsi que l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *soient capables de mener l'étude de la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et en maîtrisent les techniques ;*
- *soient en mesure de mettre en œuvre ces techniques et les exploiter pour l'étude des propriétés de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions (régularité, étude asymptotique, comparaison série-intégrale) ;*
- *puissent exploiter les résultats obtenus lors de la mise en place des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires (fonction exponentielle).*

2.6.1 Modes de convergence d'une suites ou d'une séries de fonctions

Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de X dans F. La convergence uniforme implique la convergence simple. Une série de fonctions converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Convergence normale d'une série d'applications de X dans F. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les notions de convergence simple et uniforme d'une série de fonctions sont définies via la suite de ses sommes partielles. Dans l'espace $\mathcal{B}(X;F)$ des applications bornées de X dans F, muni de la norme de la convergence uniforme, interprétation de la convergence uniforme en terme de norme.

2.6.2 Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

X désigne ici une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

Théorème d'interversion des limites (double limite) : soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de X dans F convergeant uniformément vers f sur X, a un point de E adhérent à X ; si, pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a, alors la suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ admet une limite $\ell \in F$ et on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$; autrement dit

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big).$$

Démonstration non exigible.
Adaptation, si X est un intervalle non majoré (resp. non minoré) de $\mathbb{R}$, au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
Extension du théorème et de son adaptation au cas des séries de fonctions : interversion d'une limite et d'une somme.

Théorème de continuité :
Continuité en $x_0 \in X$ de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de X dans F, continues en x_0, convergeant uniformément sur un voisinage de x_0.
Continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues de X dans F.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout compact de X.

Application : Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, continuité, sur la boule unité $\|a\| < 1$, de l'application $a \mapsto (e-a)^{-1}$ et sur $\mathcal{A}$ de l'application exponentielle $a \mapsto \exp(a)$.

Intégration d'une limite uniforme sur un segment :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de I dans F. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $f : I \to F$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans I, on pose : $g_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n$ et $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers g sur tout segment contenu dans I.

En particulier, si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur le segment J, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème d'intégration terme à terme d'une séries de fonctions continues convergeant uniformément.

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to F$ et que la suite $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $h : I \to F$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment contenu dans I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de la suite $(f_n^{(p)})_{n\geq 0}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, k-1\}$ et de convergence uniforme de la suite $(f_n^{(k)})_{n\geq 0}$ sur tout segment contenu dans I.
Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; extension aux séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Application : Dérivation, si a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie, de l'application $e_a : t \mapsto \exp(ta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n$, définie sur $\mathbb{R}$.

$e_a'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp(ta)] = a\exp(ta) = \exp(ta)a$; en particulier e_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Relation $e_a(t+s) = e_a(t)e_a(s) = e_a(s)e_a(t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

2.6.3 Approximation uniforme

Approximation uniforme d'une fonction $f : [a,b] \to F$, continue par morceaux sur $[a,b]$, par des fonctions en escalier.

Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Démonstration non exigible.

2.7 Séries entières

Ce chapitre a trois objectifs :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence ;*
- *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière (série de Taylor) ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas standard ;*
- *connaissent les propriétés d'une telle série et celles de sa somme (domaines de convergence simple, uniforme et normale ; continuité de la somme ; dérivation et intégration terme à terme) ;*
- *connaissent les développements en série entière usuels et sachent les exploiter pour exprimer la somme d'une série de fonctions ou les solutions d'une équation à l'aide des fonctions élémentaires.*

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(0,r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}$; si $0 < r < +\infty$, $D(0,r)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon r ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

2.7.1 Rayon de convergence d'une série entière

Notion de série entière associée à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes.

Notation $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ est bornée alors, pour tout nombre complexe $z \in D(0,|z_0|)$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R_a ou R d'une série entière.

Disque ouvert $D(0,R)$ de convergence ; intervalle ouvert $]-R,R[$ de convergence.

La série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D(0,R)$; elle est grossièrement divergente pour tout z tel que $|z| > R$.

Si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.

En particulier, si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$ et si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Règle de d'Alembert : rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq 0}$ est définie et admet une limite dans $[0, +\infty]$.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Minoration des rayons de convergences ; linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

2.7.2 Propriétés de la somme

La convergence d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R.

En particulier, la convergence est normale sur tout compact contenu dans $D(0, R)$.

Continuité de la somme d'une telle série sur son disque ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ s'obtient en intégrant terme à terme la série définissant f.

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

La fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k},\ t \in]-R, R[.$$

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme : avec les notations précédentes, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.7.3 Développement d'une fonction en série entière

Développement de $z \mapsto e^z$ sur $\mathbb{C}$; développement de $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ sur $D(0,1)$.	$e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$; $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\lvert z\rvert < 1$.
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, $r > 0$.	Une telle fonction est en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-r, r[$.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r, r[$, $r > 0$.	
Développements en série entière en 0 des fonctions : $t \mapsto e^{ta}$ $(a \in \mathbb{C})$, $t \mapsto \sinh t$, $t \mapsto \cosh t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \arctan t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.	Les élèves doivent être capables de déterminer un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

2.8 Calcul différentiel

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimensions finies sur $\mathbb{R}$; ce qui permet d'étendre les notions de base du calcul différentiel d'une variable aux fonctions de plusieurs variables en vue de les appliquer à la recherche d'extrémums, la résolution d'équations aux dérivées partielles et l'étude locale des courbes et des surfaces.

Seront étudiées dans ce chapitre les notions de différentielle en un point, de dérivée selon un vecteur et de dérivées partielles, les notions d'applications continûment différentiables, de gradient, de points critiques et de dérivées partielles d'ordre supérieur. Ces notions se prêtent à des représentations issues de différents cadres ou registres ; on tâchera de souligner cet aspect en faisant intervenir à la fois les aspects intrinsèques et calculatoires, et en ayant régulièrement recours à des figures et à des croquis.

Lors de cette étude, la différentielle en un point d'une application est introduite à l'aide d'un développement limité ; on tâchera de mettre en valeur les faits suivants :

- *de nombreuses questions de calcul différentiel s'étudient en se ramenant, via une paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle ; par exemple, en paramètrant le segment $[a, a+h]$ par l'application $t \mapsto a + th$, on obtient $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$;*
- *les dérivées partielles fournissent un outil pratique de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base ;*
- *le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *sachent vérifier si une fonction est différentiable, de classe $\mathcal{C}^k$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, et en calculer les dérivées partielles ;*
- *soient en mesure de déterminer les points critiques d'une fonction différentiable, si elle en admet, et en rechercher les extremums locaux ou globaux ;*
- *soient capables d'appliquer les résultats du calcul différentiel notamment pour déterminer les vecteurs tangents au graphe d'une fonction de deux variables ou à une surface d'équation $f(x,y,z) = 0$, et préciser le plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $z = \varphi(x,y)$;*
- *soient initiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles à travers l'étude d'exemples simples ;*
- *soient capables d'exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations, ...).*

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de E à valeurs dans F, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

2.8.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, différentielle

Dérivée de f au point a selon le vecteur non nul v.	Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.
Dérivées partielles de f dans une base de E.	Notations $D_j f(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, ..., x_n)$ est autorisée.
Application différentiable au point a.	Développement limité à l'ordre 1 ; notation $o(h)$.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur non nul.	
Différentielle de f en a, appelée aussi application linéaire tangente à f en a. Relation $$df(a)(v) = D_v f(a).$$	Notations $df(a)$, $df(a).v$, df.
Cas particuliers : restriction à un ouvert d'une application constante, d'une application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	
Matrice de $df(a)$ dans un couple de bases de E et F.	Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
Cas des fonctions d'une variable : si U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un élément de U, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a)(1)$.	

2.8.2 Opérations sur les applications différentiables

Différentiabilité et différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables.	$d(\lambda.f + g)(a) = \lambda.df(a) + dg(a)$.
Différentiabilité et différentielle de l'application $B(f, g) : (x, y) \mapsto B(f(x), g(y))$ où B est une application bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout couple (u, v), on ait $\|B(u, v)\| \leq C\|u\|\,\|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.
Différentiabilité et différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc γ : si $\gamma : I \to E$ est dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$, alors l'application $f \circ \gamma : I \to F$ est dérivable en t et $$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t).$$	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.
Composition d'applications différentiables, dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Règle de la chaîne (chain rule) : $x_1, \ldots, x_m$ étant différentiables, calcul des dérivées partielles de $$(t_1, \ldots, t_m) \mapsto f\big(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m)\big).$$

2.8.3 Cas des applications numériques

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient dans une base orthonormée.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est admis à ce stade ; il sera établi dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale (il pointe la direction selon laquelle la variation de f est maximale, dite direction de la plus grande pente de f).

Point critique d'une application différentiable. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.

Une condition suffisante sera étudiée plus tard, après l'introduction de la classe $\mathcal{C}^2$ et la démonstration du théorème spectral.

2.8.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Notion de vecteur tangent à une partie ; ensemble $T_a\mathcal{A}$ des vecteurs tangents à $\mathcal{A}$ en a.
S'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$, dérivable en 0 et à valeurs dans $\mathcal{A}$, tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ alors v est tangent à $\mathcal{A}$ en a.

Si $\mathcal{A}$ est une partie de E et a un point de $\mathcal{A}$, un vecteur v de E est dit tangent à $\mathcal{A}$ en a s'il existe une suite $(x_n)_n$ dans $\mathcal{A} \setminus \{a\}$ et une suite $(\alpha_n)_n$ de réels positifs telles que :
(i) la suite $(x_n)_n$ converge vers a ;
(ii) la suite $\big(\alpha_n.(x_n - a)\big)_n$ converge vers v.

Dans le cas où $T_a\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de E, variété affine tangente à $\mathcal{A}$ en a, dite aussi espace tangent à $\mathcal{A}$ en a.
Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où $\mathcal{A}$ est le graphe d'une fonction réelle φ différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{A} = \{\big(x, y, \varphi(x, y)\big) \ ; (x, y) \in \Omega\}.$$

Dans ce cas, on appelle variété affine tangente à $\mathcal{A}$ en a, l'ensemble image de $T_a\mathcal{A}$ par la translation de vecteur a, c'est à dire $a + T_a\mathcal{A}$.
Plan affine tangent en un point à une surface d'équation $z = \varphi(x, y)$: équation cartésienne.

Si E est euclidien et f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de E, et $\mathcal{A}$ une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à $\mathcal{A}$ en un point a sont orthogonaux au gradient de f en a.
Application dans l'espace euclidien de dimension 3 pour une surface d'équation $f(x, y, z) = c$.

Si $f : U \to \mathbb{R}$, U étant un ouvert de E, l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in U \ ; f(x) = c\}$ est appelé la ligne de niveau de f définie par l'équation $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$; en dimension 3, on parle de surface de niveau c et en dimension 2 de ligne (ou de courbe) de niveau c.
Le théorème des fonctions implicites est hors programme.

2.8.5 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E si elle est différentiable sur U et si l'application $df : a \mapsto df(a)$ est continue sur U.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, ses dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.	
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F et γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans U, alors en posant $a = \gamma(\alpha)$ et $b = \gamma(\beta)$, avec $(\alpha, \beta) \in I^2$, on obtient $$f(b) - f(a) = \int_\alpha^\beta df(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Application au calcul de la circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Si U est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur U.	Démonstration exigible pour U convexe.

2.8.6 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k. Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de E si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.	Démonstrations non exigibles.
Développement limité à l'ordre deux, au voisinage d'un point, pour une application de classe $\mathcal{C}^2$.	
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Pour l'étude d'équations aux dérivées partielles, les élèves doivent savoir exploiter les techniques de changements de variables : transformations affines, passage en coordonnées polaires. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas éxigée.

3 Seconde période

3.1 Éspaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de première année MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, qui constitue un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *étudier les endomorphismes symétriques et orthogonaux, ce qui permet d'approfondir simultanément la réduction des endomorphismes et les connaissances de première année MPSI relatives aux isométries.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *maîtrisent les notions de bases sur le produit scalaire, sachent orthogonaliser une famille libre (indexée par une partie de* $\mathbb{N}$*) d'un espace préhilbertien au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt, et soient capables d'exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ;*
- *maîtrisent, dans le cas euclidien, les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes symétriques, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel ;*

Hormis la définition et quelques exemples simples, l'étude de la notion de l'adjoint d'un endomorphisme est hors programme. Cette notion est introduite à titre d'information pour préparer les élèves aux cursus post classes préparatoires. Les résultats importants dans ce domaine seront traités dans ces cursus.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

Les notions de forme quadratique et d'endomorphisme symétrique positif sont hors programme.

3.1.1 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.	Rappels de première année.
Caractérisation métrique du projeté orthogonal.	Caractérisation du projeté orthogonal comme solution d'un problème de minimisation de distance.
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	

3.1.2 Suites orthonormales, suites totales

Suites orthonormales $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	Exemples de suites orthogonales de polynômes.

Inégalité de Bessel : si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale, alors, pour tout $x \in E$, la suite $(< x, e_n >)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a $$\sum_{n\in\mathbb{N}} < x, e_n >^2 \leq \|x\|^2.$$	
Suites totales. Bases hilbertiennes (dénombrables).	Exemples de bases hilbertiennes : dans l'espace des polyômes, dans l'espace des fonctions continues T-périodiques, etc.
Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale de E et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$, alors, pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	En particulier, on a l'égalité de Parseval : $$\sum_{n\in\mathbb{N}} < x, e_n >^2 = \|x\|^2.$$

3.1.3 Endomorphismes symétriques d'un espace préhilbertien. Cas euclidien.

L'endomorphisme u est dit symétrique si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $< u(x), y >=< x, u(y) >$.	Pas d'étude systématique de cette notion en dimension infinie. Des exemples peuvent être proposés en liaison avec les équations différentielles.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme symétrique.	Si u est un endomorphisme symétrique, l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u.
Dans le cas euclidien, caractérisation de la symétrie d'un endomorphisme u par la matrice représentant u dans une base orthonormale.	
Dans le cas euclidien, caractérisation des endomorphismes symétriques idempotents, involutifs.	
Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale.	Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.
Traduction matricielle du théorème spectral.	Toute matrice carrée symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable.
Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, expression des extremums de la fonction $x \mapsto < u(x), x >$ sur la sphère unité de E à l'aide des valeurs propres de u.	Interprétation dans le registre matriciel : si A est une matrice carrée symétrique réelle, extremums de la fonction $X \mapsto {}^tXAX$ sur la sphère unité.

3.1.4 Endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

Notion d'isométrie (ou endomorphisme orthogonal) d'un espace vectoriel euclidien E. Lien avec les matrices orthogonales.	Rappels de première année MPSI.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	Si u est un endomorphisme orthogonal de E, l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u.
Réduction d'un endomorphisme orthogonal en base orthonormale.	Traduction matricielle.

Cas des dimensions 2 et 3 ; réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.
Non commutativité de $SO(E)$ en dimension ≥ 3.

Matrice d'une rotation dans une base orthonormale adaptée à son axe.

3.1.5 Formes linéaires d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme

Théorème de représentation : pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un et un seul vecteur x tel que

$$\forall y \in E, \quad \varphi(y) = <x, y> .$$

Isomorphisme canonique entre E et l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E, il existe un unique endomorphisme v de E tel que,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad <u(x), y> = <x, v(y)>$$

Adjoint d'un endomorphisme symétrique ou orthogonal.

Traduction matricielle dans une base orthonormale.
Il s'agit d'une présentation minimale de la notion d'adjoint. Les résultats importants dans ce domaine seront traités dans les cursus post classes préparatoires.

3.1.6 Application à l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables réelles

Rappels sur le développement de Taylor à l'ordre 2 en un point critique a, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert ; matrice hessienne $H_a(f)$ de f en a, elle est symétrique réelle.
Application du théorème spectral à la matrice $H_a(f)$ pour obtenir une condition suffisante de maximum (minimum) local en un point critique.

En dimension 2, avec les notations de Monge, on obtient un extremum local si $rt - s^2 > 0$ et un point-col (ou point-selle) si $rt - s^2 < 0$.
Indiquer la nécessité d'un développement limité d'ordre supérieur pour le cas $rt - s^2 = 0$.

3.2 Intégrales dépendant d'un parmètre

L'objectif de ce chapitre est double :

- *étudier les suites et les séries de fonctions intégrables, grâce au théorème de convergence dominée et le théorème d'inégration terme à terme d'une séries de fonctions ;*
- *appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre (théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$).*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves connaissent ces théorèmes et soient en mesure de les exploiter notamment pour mener l'étude de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre ; cette exploitation suppose en particulier la capacité à en vérifier les conditions d'application en insistant d'abord sur les hypothèses importantes (hypothèse de domination , hypothèse de convergence, hypothèse d'intégrabilité, ...).

Il est recommandé de commencer ce chapitre par des rappels de cours et des exercices de révision sur l'intégration sur un intervalle quelconque, vue en première année MPSI, et de préviligier l'étude *d'exemples significatifs (intégrales eulériennes, transformées de Fourier, transformées de Laplace, ...) en évitant les situations artificielles et les exercices de pure virtuosité technique.*

3.2.1 Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominé : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs complexes. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\lim_n \int_I f_n = \int_I f$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.
L'hypothèse de domination est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux de f ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.
Extension au cas d'une famille $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Inégration terme à terme d'une séries de fonctions : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur I telle que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f, continue par morceaux sur I, et que la série $\sum_n \left(\int_I |f_n|\right)$ soit convergente. Alors, f est intégrable sur I et $\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.
L'hypothèse de convergence de la série $\sum_n \left(\int_I |f_n|\right)$ est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux de f ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.
Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel, où l'on permute les signes $\sum$ et $\int$, que l'on justifie ensuite.

3.2.2 Continuité et dérivation d'une inégrale dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité : Soient A une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$; on suppose que f est continue par rapport à x, continue par morceaux par rapport à t et telle que, pour tout élément x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur I. S'il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que, pour tout élément (x,t) de $A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

L'hypothèse de domination est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.
Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée au voisinage d'un point a de A.
Si A est intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans A.

Théorème de dérivation : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J \times I$ et dérivable par rapport à x. On suppose que :
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur I ;
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t,\ x \in J.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans J.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale dépendant d'un paramètre, sous l'hypothèse d'intégrabilité de $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,.)$, pour tout x de J si $0 \leq p \leq k-1$, et domination sur tout segment contenu dans J de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.

3.2.3 Exemples d'applications

Exemples d'emploi du théorème de convergence dominé et du théorème d'inégration terme à terme d'une séries de fonctions intégrables.

Exemples significatifs d'étude de fonctions définies comme intégrales dépendant d'un parmètre : régularité, étude asymptotique.

Inégrales eulériennes, transformées intégrales (facteur déchelle, retard, amortissement, valeur initiale ou finale, ...).

3.3 Probabilités

Ce chapitre complète l'étude des variables aléatoires discrètes déjà entamée en première année MPSI et aborde celle des variables aléatoires à densité ; on y étudie aussi quelques résultat d'approximation.

Le chapitre est organisé autour des axes suivants :

- *consolider les acquis de première année MPSI sur les variables aléatoires discrètes ;*
- *introduire les notions de fonction de répatition, de moments et de fonction génératrice, et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples ;*
- *étudier des exemples usuels de lois discrètes rélles (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géomètrique, loi de Poisson, ...) et de lois à densité sur $\mathbb{R}$ (loi uniforme, loi exponentielle, loi gamma, loi gaussienne (ou normale), ...) ;*
- *étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *aient étudié des exemples usuels de lois discrètes rélles et de lois à densité ;*

- *sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois discrètes ou continues usuelles ;*
- *sachent utiliser les fonctions génératrices pour déterminer la loi ou calculer les moments d'une variable aléatoire entière dans des cas standard ;*
- *soient capables de déterminer la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition ;*
- *apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes ou à densité ;*
- *apprennent à approcher, sous certaines conditions, une loi binomiale par une loi de Poisson, et une loi hypergéométrique par une loi binomiale ;*
- *sachent utilisent les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, . . .).*

3.3.1 Révisions du programme de première année MPSI sur les espaces probabilisés

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle événement toute partie de Ω qui est élément de la tribu $\mathcal{T}$.	Rappeler les axiomes vérifiés par une tribu et ceux vérifiés par une probabilité, en particulier l'additivité dénombrable et la continuité monotone séquentielle de P.
Si Ω est fini ou dénombrable le choix $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, est le plus usuel.	Le choix de tribus dans le cas général n'est pas un objectif du programme.
Événements négligeables, événements quasi-certains.	Propriétés quasi-certaines (on dit aussi presque sûres).
Événements indépendants.	L'indépendance d'une famille $(A_j)_{j\in J}$ est aussi appelée indépendance mutuelle. Elle est définie comme la relation $P\left(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_n}\right) = P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_n})$ pour toute partie finie $\{j_1, \ldots, j_n\}$ de J.
Probabilité conditionnelle.	P_B, probabilité sachant B, est définie lorsque $P(B) \neq 0$. Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.

3.3.2 Variables aléatoires et lois de variables aléatoires

On appelle variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}\left(]-\infty, x]\right) \in \mathcal{T}.$$	Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A)$ est l'image réciproque par X de A, c'est à dire l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \in A$; on la note plus simplement $(X \in A)$. Pour $A =]-\infty, x]$ cette image réciproque est l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \leq x$; on la note plus simplement $(X \leq x)$. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ peut être introduite, mais aucun résultat concernant cette tribu n'est exigible.

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ obtenu en opérant par passages au complémentaire, par réunions, par intersections sur une famille finie ou dénombrable d'intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, et si X est une variable aléatoire réelle alors $(X \in A)$ appartient à $\mathcal{T}$. Donc $P(X \in A)$ a un sens.

C'est le cas, entre autres, pour tout partie A qui est un intervalle réel ou le complémentaire d'un intervalle réel : savoir utiliser les relations suivantes

$$\begin{array}{ll}
(X \in]a, +\infty[) & = \overline{(X \in]-\infty, a])}, \\
(X \in [a, +\infty[) & = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (X \in]a - 1/k, +\infty[), \\
(X \in]-\infty, a[) & = \overline{(X \in [a, +\infty[)}, \\
(X \in]a, b]) & = (X \in]-\infty, b]) \setminus (X \in]-\infty, a]), \\
(X \in [a, b]) & = (X \in]-\infty, b]) \setminus (X \in]-\infty, a[), \\
(X \in [a, b[) & = (X \in]-\infty, b[) \setminus (X \in]-\infty, a[), \\
(X \in]a, b[) & = (X \in]-\infty, b[) \setminus (X \in]-\infty, a]).
\end{array}$$

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est une famille finie de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est une application continue alors l'application composée $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notation $f(X_1, \ldots, X_k)$.
La preuve de ce résultat n'est pas au programme ; on en déduit le fait que la somme, le produit, le minimum, le maximum, ... d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et f une application monotone de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors l'application composée $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notation $f(X)$.
Le résultat s'étend au cas où f est monotone par morceaux.

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ qui converge simplement vers X, une application de Ω vers $\mathbb{R}$. Alors X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

La preuve utilise la définition de limite et les propriétés des tribus.

On appelle loi (relativement à P) de la variable aléatoire réelle X l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout intervalle réel J associe le nombre $P(X \in J)$.

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$. C'est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On appelle loi (relativement à P) d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$ de variables aléatoires réelles l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})^k$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout produit cartésien $J_1 \times \cdots \times J_k$ d'intervalles réels associe le nombre

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i \in J_i)\Big).$$

On note $(X_1 \in J_1, \ldots, X_k \in J_k)$ l'événement

$$\bigcap_{i=1}^{k} (X_i \in J_i).$$

Fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X : c'est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = P(X \leq t).$$

Propriétés de F_X : c'est une fonction croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

La réciproque (au sens où toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ces trois propriétés est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle) n'est pas au programme.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de F_X permet de calculer $P(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
La continuité de la fonction F_X en t équivaut à $P(X = t) = 0$.

On doit savoir

$$\begin{array}{ll}
P(X \in]a, +\infty[) & = 1 - F_X(a), \\
P(X \in [a, +\infty[& = 1 - \lim\limits_{a^-} F_X, \\
P(X \in]-\infty, a[) & = \lim\limits_{a^-} F_X, \\
P(X \in]a, b]) & = F_X(b) - F_X(a), \\
P(X \in [a, b]) & = F_X(b) - \lim\limits_{a^-} F_X, \\
P(X \in [a, b[) & = \lim\limits_{b^-} F_X - \lim\limits_{a^-} F_X, \\
P(X \in]a, b[) & = \lim\limits_{b^-} F_X - F_X(a), \\
P(X = a) & = F_X(a) - \lim\limits_{a^-} F_X.
\end{array}$$

On définit la fonction de répartition d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$ de variables aléatoires réelles comme étant l'application de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$, $(t_1, \ldots, t_k) \mapsto P(X_1 \leq t_1, \ldots, X_k \leq t_k)$. Les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$.

Pas de résultats théoriques au programme dans le cas de plusieurs variables.

Deux familles de lois sont au programme : lois discrètes et lois à densité.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi discrète (relativement à la probabilité P) s'il existe $\Omega' \in \mathcal{T}$ de probabilité 1 tel que $D = X(\Omega')$ soit au plus dénombrable.
On obtient

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

On peut supprimer de D tous les éléments x tels que $P(X = x) = 0$; les x restants sont appelées valeurs possibles de la variable discrète X.

La loi de X est caractérisée par la donnée de D et de l'application $x \mapsto P(X = x)$, de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que la loi de X est discrète usuelle s'il existe un intervalle J de $\mathbb{Z}$ et une bijection croissante

$$\varphi : J \to D,\ k \mapsto x_k.$$

L'usage est, dans ce cas, de représenter la loi de X par un tableau de lignes comportant en première ligne les x_k, éléments de D, écrits en ordre croissant, en deuxième ligne les probabilités correspondantes $p_k = P(X = x_k)$.

Des lignes supplémentaires peuvent donner les cumuls $\sum_{j \leq k} p_j$ ou les produits $x_k p_k$. Il est intéressant d'utiliser un tableur.

Exemples premiers de lois discrètes.

Rappeler les lois vues en première année.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi à densité (relativement à la probabilité P) si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble fini F (éventuellement vide).

Une telle variable aléatoire est dite aussi de loi continue. On appelle alors densité de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(t) = F'_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(t) = 0$ pour $t \in F$.

La densité est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus F$, d'intégrale convergente et valant 1 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout intervalle I de borne inférieure $a \in \mathbb{R}$ et de borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples premiers de lois continues.

Loi uniforme sur un segment réel $[a,b]$, loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, loi gamma de paramètre (α, λ), lois gaussiennes.

Loi d'une variable aléatoire obtenue par composition.

Il s'agit d'étudier la loi de $Y = g(X)$ où X est une variable aléatoire de loi connue et g une fonction de la variable réelle, ou plus généralement, celle de $Y = g(X_1, \dots, X_k)$.
Aucun résultat théorique général n'est au programme ; les exercices porteront sur des cas simples.

Une famille $(X_j)_{j\in J}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante si, pour toute famille $(I_j)_{j\in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, la famille $\big((X_j \in I_j)\big)_{j\in J}$ d'événements est indépendante.

On distinguera l'indépendance de la famille de variables (dite mutuelle parfois) et l'indépendance deux à deux des variables. On notera que l'indépendance d'une famille de variables est relative à une probabilité donnée.

Indépendance héritée : Si la famille $(X_j)_{1\le j\le n_k}$ est indépendante et si $0 < n_1 < \cdots < n_k$, alors la famille $\Big(f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k})\Big)$ est indépendante.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de lois discrètes données.

Modélisation du jeu Pile-Face répété (ou infini).

Loi conditionnelle de X sachant un événement non négligeable A.

C'est $(P_A)_X$ la loi de X sous la probabilité P_A. On l'utilise notamment dans le cas où (X,Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $A = (Y = t)$, t réel donné.

Loi de la somme de variables indépendantes.

Proposer de nombreux exemples de somme de variables indépendantes. Dans certains cas, on a une propriété de stabillité : la loi de la somme est du même type. Étudier notamment les cas de lois gaussiennes et de lois de Poisson.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont discrètes d'ensembles de valeurs possibles respectifs D_1 et D_2 (sous ensembles de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables), alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est discrète.

Dans ce cas, l'ensemble des valeurs possibles de S est $D = \{u + v \ ; \ (u, v) \in D_1 \times D_2\}$ et la loi de S est donnée, pour tout $s \in D$, par :

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u)P(X_2 = s - u) \\ &= \sum_{v \in D_2} P(X_1 = s - v)P(X_2 = v). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée la convolution discrète des lois de X_1 et X_2.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_1 soit discrète, d'ensemble de valeurs possibles D_1, et X_2 soit continue, de densité f_2, alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la densité de S est la fonction :

$$f : s \mapsto \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u) f_2(s - u).$$

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont continues, de densités respectives f_1 et f_2, alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la de densité de S est la fonction

$$f : s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(s - u)\, du.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution des densités f_1 et f_2.

3.3.3 Espérance, moments

Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.

Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, ou continue, de densité f_X, on définit l'espérance de X par la formule

$$E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k x_k\, p_k & \text{(cas discret)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, \mathrm{d}t & \text{(cas continu)} \end{cases}$$

sous réserve de la sommabilité (resp. l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$) de la famille $(x_k\, p_k)_k$ (resp. de la fonction $t \mapsto t\, f_X(t)$).
Espérance de variables aléatoires réelles de lois usuelles.

La sommabilité permet de donner une valeur finie qui ne dépend pas d'un ordre choisi des x_k ; l'intégrabilité pour une fonction est l'analogue de la sommabilité pour une famille.

Propriété de transfert à une variable :
Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérence si, et seulement si, la famille $(g(x_k)\, p_k)_k$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_k g(x_k)\, p_k.$$

Si X est une variable aléatoire réelle continue, de densité f_X, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto g(t)f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En cas d'intégrabilité, on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles dans le cas général. On pourra en revanche traiter des exemples de recherche de l'espérance de $Y = g(X)$; on évitera les exemples inutilement compliqués.

Propriété de transfert à deux variables (cas discret) :
Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles de loi discrète (loi conjointe caractérisée par $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)_{i,j}$), alors la variable aléatoire $Y = g(X_1, X_2)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $\big(g(x_i, y_j)\,p_{i,j}\big)_{i,j}$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\,p_{i,j}.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible dans le cas général. On traitera des exemples simples de recherche de l'espérance de $Y = g(X_1, X_2)$.
Le transfert à deux variables dans le cas continu (à densité) n'est pas au programme.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, si Y admet une espérance et si $|X| \leq Y$ alors X admet une espérance.

Résultat admis qui relève en fait de l'intégration de Lebesgue.

Propriétés de l'espérance : Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Les démonstrations de ces propriétés dans le cas général sont admises. Elles peuvent être présentées dans le cas discret.

Moments, variance, écart-type, covariance :
Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X est, sous réserve d'existence, $E(X^k)$.

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet un moment d'ordre j pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$; de même la variable aléatoire réelle $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k, pour tout réel α.

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de X la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Dans ce cas on a :
- $V(X) \geq 0$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque partout ;
- $V(X + \alpha) = V(X)$, pour tout réel α.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors :
- la variable aléatoire XY admet une espérance et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ (Cauchy-Schwarz) ;
- $S = X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et sa varaince $V(S)$ est donnée par la formule ci-contre.

$$V(S) = V(X)+V(Y)+2E\big((X-E(X))(Y-E(Y)\big).$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance du couple (X, Y) par la formule

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Avec cette notation on obtient

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,C(X,Y).$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

La variance de la somme est alors la somme des variances.
La réciproque est fausse : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Corrélation linéaire : Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) par la formule

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est un élément de l'intervalle $[-1, 1]$.
Le cas $\rho = 1$ équivaut à $Y = \alpha\, X$ avec $\alpha > 0$,
le cas $\rho = -1$ équivaut à $Y = \alpha\, X$ avec $\alpha < 0$.
L'indépendance de X et Y implique $\rho = 0$, la réciproque est fausse.

Si X admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à X la variable aléatoire réelle $\widetilde{X} = X - E(X)$.
Si X admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à X la variable aléatoire réelle $X^* = \dfrac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$.

3.3.4 Fonctions génératrices

Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k P(X = k).$$

La loi de X est caractérisée par G_X (pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$).

La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et $G_X(1) = 1$; cette série converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.
La fonction G_X est continue sur [-1,1] et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
On pourra présenter la notion de transformée de Laplace-Fourier dans le cas d'une loi à densité mais aucun résultat n'est au programme concernant ces transformations.

Lien entre fonction génératrice et moments : la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G'_X(1)$; la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X admet une dérivée seconde en 1, auquel cas $E(X^2) - E(X) = G''_X(1)$. Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les élèves doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$. Les élèves doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ quand les X_i sont indépendantes.

3.3.5 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Inégalité de Markov : Si X est une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors, pour tout $\beta > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq \frac{V(X)}{\beta^2}.$$

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre X et sa valeur moyenne $E(X)$.

Inégalité de Jensen : Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application convexe sur $\mathbb{R}$ et si $Y = f(X)$ admet une espérance, alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

Démonstration uniquement dans le cas où la loi de X est discrète.

Définition de la convergence en probabilité d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to +\infty} P(|Y - X_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Si la suite de fonctions $(f_k)_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g, la suite de variables aléatoires réelles $(f_k(X))_k$ converge en probabilité vers $g(X)$.

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \ \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où D_Y désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction F_Y.

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de Y.

Si les variables aléatoires X_n ainsi que Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$ vers Y équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

Exemple à connaître : soit $\lambda > 0$ et soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telle que la suite $(np_n)_{n\geq 1}$ converge vers λ ; si, pour tout $n \geq 1$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre (n, p_n) alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fausse.

Résultat admis.

Loi faible des grands Nombres : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geq 1}$, de variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable constante $\mu = E(X_1)$.

Application : interprétation fréquentiste de $P(A)$.

Théorème de la limite centrée : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)\right)_{n\geq 1}$, où $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi gaussienne standard.

la vitesse de convergence de la loi des grands nombre est donc en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Ce théorème admet de nombreuses applications, notamment en statistiques ; elles ne sont pas au programme.

3.4 Équations différentielles linéaires

Ce chapitre a pour objectifs d'introduire quelques notions de base sur les équations différentielles non linéaires et d'étudier les équations différentielles linéaires. L'introduction du cas non linéaire vise à éclairer les résultats du cas linéaire en montrant leurs spécificités ; elle sert aussi pour préparer les élèves aux enseignements dispensés dans les cursus post classes préparatoires.

Le chapitre est organisé autour des axes suivants :

- *introduire quelques notions de base sur les équations différentielles non linéaires et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples ;*
- *étudier les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à valeurs vectorielles, et leurs traductions en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ;*
- *étudier le cas particulier des systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec l'exponentielle d'endomorphismes et de matrices ;*
- *étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.*

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux élèves divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice et son influence sur le comportement des solutions ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *aient traité des exemples de recherche et d'étude de courbes intégrales d'un champ linéaire de vecteurs dans le plan ;*
- *maîtrisent la pratique de la résolution d'une équation différentielle du type $X' = A\,X$, où A est une matrice à coefficients réels ou complexes, par réduction de A à une forme diagonale (ou triangulaire en dimension ≤ 3), et connaissent l'expression intégrale des solutions de l'équation $X' = A\,X + B(t)$;*
- *aient pratiqué, sur des exemples, l'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 et notamment la recherche de solutions développables en série entière ainsi que les problèmes de raccordements de solutions.*

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace normé de dimension finie.

3.4.1 Généralités

Équation différentielle générale $x' = f(t,x)$. Solution d'une telle équation. Problème de Cauchy. Méthode d'Euler pour la recherche de solutions approchées.	L'application $f : U \to F$ est donnée, où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times F$, on cherche les couples (J, x) où J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et x une application dérivable de J dans F vérifiant : $$\forall t \in J,\ (t, x(t)) \in U \text{ et } x'(t) = f(t, x(t)).$$
Cas des équations différentielles à variables séparables : $F = \mathbb{R}$ et $f(t,u) = a(t)b(u)$.	Pas de résultat général exigible ; les élèves doivent savoir traiter des exemples simples. Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent utile ici.
Théorème de Cauchy-Lipschitz : résultat d'existence et d'unicité locale.	Le théorème de Cauchy-Lipschitz est admis et il n'est pas le point central du paragraphe, il est présenté pour préparer les élèves au cas non linéaire qui sera traité dans les cursus post classes préparatoires. Il peut aussi servir à éclairer les résultats du cas linéaire en montrant leurs spécificités.

3.4.2 Équations différentielles linéaires, solutions, structures

Équation différentielle linéaire : $$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$, b une application continue de I dans F.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
Solution d'une équation différentielle linéaire, solution globale.	Principe de superposition.
Problème de Cauchy.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n. Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.

Solution d'une telle équation, problème de Cauchy associé.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution globale d'un problème de Cauchy, unicité locale des solutions.

La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n.

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions globales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur F.
Dimension de l'espace des solutions globales. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.
Structure de l'ensemble des solutions globales d'une équation différentielle linéaire avec second membre.

Exemples d'équations scalaires d'ordre 1 (resp. 2) non résolues en y' (resp. y'') :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$

Les élèves doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
Exemples d'étude de problèmes de raccordements de solutions.

3.4.3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants : $x'(t) = a(x(t)),\ a \in \mathcal{L}(F)$.

Traduction matricielle $X' = AX$.

Si x_0 est un élément de F et $a \in \mathcal{L}(F)$, résolution du problème de Cauchy

$$x'(t) = a(x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

La solution globale est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0) = e^{(t-t_0)a}(x_0).$$

Traduction matricielle.

Exemples de calculs explicites de solutions.

On se limite aux deux cas : a diagonalisable ou $\dim F \leq 3$.

3.4.4 Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes : définition d'un système fondamental de solutions de l'équation $x'(t) = a(t)(x(t))$, caractérisation d'un tel système ; application à la résolution de l'équation différentielle $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ par la méthode de variation des constantes.

Dans les exercices pratiques, on se limite au cas de la dimension 2.

Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.

Expression intégrale des solutions d'un tel système.

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.

Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.

Cas d'une équation du type $x'' + q(t)x = 0$.

3.5 Fonctions holomorphes

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la dérivation complexe et les fonctions holomorphes puis établir le principe du prolongement analytique et le principe des zéros isolés.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves acquièrent des notions de base de l'analyse complexe notamment à travers l'étude d'exemples.

Dans ce qui suit, Ω *désigne un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $\widetilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+iy \in \Omega\}$ *;* $\widetilde{\Omega}$ *est un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^2$*.*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une application ; on note* $\tilde{f}$ *l'application définie sur* $\widetilde{\Omega}$ *par* $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$ *et on pose* $u(x,y) = \mathrm{Re}\big(\tilde{f}(x,y)\big)$ *et* $v(x,y) = \mathrm{Im}\big(\tilde{f}(x,y)\big)$, $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$.

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$.

Si $0 < r < +\infty$, $D(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

Dérivation complexe.

Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $z_o \in \Omega$ si $\lim\limits_{\substack{z \to z_o \\ z \neq z_o}} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$ existe, auquel cas elle est notée $f'(z_o)$.

f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_o = x_o + iy_o$ si, et seulement si, $\tilde{f}$ est différentiable en (x_o, y_o) et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_o, y_o) = i\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Équations de Cauchy-Riemann : La formule $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_o, y_o) = i\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_o, y_o)$ se traduit par les deux équations $\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$, dites équations de Cauchy-Riemann.

Fonction holomorphe sur Ω.
f est est holomorphe sur Ω si, et seulement si, $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\widetilde{\Omega}$ et vérifie les équations de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω et si la fonction $z \mapsto f'(z)$ est continue sur Ω ; la fonction $z \mapsto f'(z)$ est alors appelée la dérivée de f, notée f'.

Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée au sens complexe coïncide avec sa dérivée algébrique.
Plus généralement, si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f, alors f est holomorphe sur $D(0,R)$ et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1},\ z \in D(0,R).$$

On peut démontrer ce résultat par un calcul direct en utilisant le théorème de dérivation de la somme d'une série d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.
Il en résulte que f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$ et qu'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z^{n-k},\ z \in D(0,R).$$

L'ensembles des fonctions holomorphes sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}$-algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note $\mathcal{H}(\Omega)$.

La dérivation est linéaire et vérifie la formule de Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$ pour f, g holomorphes sur Ω ; de plus, si f_1 est holomorphe sur un ouvert Ω_1 et si f_2 est holomorphe sur un ouvert Ω_2 contenant $f_1(\Omega_1)$, alors $f_2 \circ f_1$ est holomorphe sur Ω_1 et $(f_2 \circ f_1)' = (f_2' \circ f_1)f_1'$.

Fonction analytique sur Ω.

Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière autour de tout point de Ω, c'est à dire si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq r$ tels qu'on ait $D(z_0, r) \subset \Omega$ et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,\ z \in D(z_0, r).$$

Toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$.

Formule de Taylor algébrique.

La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$.

$$e^z = e^{z_0}e^{z-z_0} = e^{z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!},\ z_0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Plus généralement, la somme d'une série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence.

On peut démontrer ce résultat par un calcul direct, en utilisant la technique des suites doubles sommables de nombres complexes.

L'ensembles des fonctions analytiques sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}$-algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note $\mathcal{O}(\Omega)$.

Toute fonction f analytique sur Ω est holomorphe sur Ω : $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$.

f est de plus indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω et, pour tout $z_0 \in \Omega$, le développement de f autour de z_0 est donné par sa série de Taylor en z_0, c'est à dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

valable dans le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω.

Toute fonction f holomorphe sur Ω est analytique sur Ω : $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. Plus précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$, si $D(z_0, R)$ dsigne le plus grand disque ouvert de centre z_0 inclus dans Ω, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombre complexes, uniquement déterminée, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ soit $\geq R$ et qu'on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\ z \in D(z_0, R).$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Principe du prolongement analytique : Soit g une fonction holomorphe sur un ouvert non vide Ω_1 ; s'il existe un ouvert connexe par arcs Ω contenant Ω_1 et une fonction f holomorphe sur Ω et prolongeant g, alors f est unique.

Principe des zéros isolés : soit f une fonction *non nulle* et holomorphe sur Ω, ouvert connexe par arcs ; si z_o est un point de Ω tel que $f(z_o) = 0$ alors, il existe $r > 0$ tel que $D(z_o, r) \subset \Omega$ et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_o, r) \setminus \{z_o\}$.

On en déduit que si f est une fonction holomorphe sur Ω, ouvert connexe par arcs, et s'il existe $z_o \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_o) = 0$, alors f est nulle sur Ω.