# Résumé de Math Sup et compléments : matrices

## I - Opérations dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes ($n$ et $p$ entiers naturels non nuls) est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ qui à un couple d'indices $(i,j)$ associe un élément de $\mathbb{K}$ noté $a_{i,j}$. Une matrice se note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

### 1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Addition de deux matrices.** $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
**Multiplication par un scalaire.** $\lambda(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Muni de ces deux lois, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $np$ et en particulier $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n^2$.

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient ligne $k$, colonne $l$ vaut $1$ si $(k,l)=(i,j)$ et $0$ sinon. Une écriture abrégée de son terme général est $\delta_{k,i}\times\delta_{l,j}$.

### 2) Produit de deux matrices.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p,\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit $AB$ est la matrice de format $(n,q)$ dont le terme général ligne $i$, colonne $j$, $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Dans le cas des matrices non carrées, ce produit n'est pas une loi interne. Il est « associatif », non « commutatif » en général et « distributif sur l'addition ».

**Théorème.** $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, non commutatif pour $n\geqslant 2$.
L'ensemble des matrices inversibles pour $\times$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe, non commutatif pour $n\geqslant 2$.

Dangers principaux :
- On peut avoir $AB=0$ sans que ni $A$, ni $B$ ne soient nuls : $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ ou $B=0$.
- Plus généralement, l'égalité $AB=AC$ n'entraîne pas en général $B=C$ mais si $A$ est carrée et inversible, $A$ est simplifiable.
- $AB=0 \not\Rightarrow BA=0$.
- Les identités $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ et plus généralement le binôme de Newton, et aussi $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ ne sont vraies que si $A$ et $B$ commutent.
- La somme de 2 matrices inversibles n'est en général pas inversible.

**Théorème.** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $A$ est inversible  2) $\det A\neq 0$  3) $A$ est inversible à gauche
4)$A$ est inversible à droite  5) $A$ est simplifiable à gauche  6) $A$ est simplifiable à droite
7) $\mathrm{rg}A = n$  8) $\mathrm{Ker}A=\{0\}$  9) $\mathrm{Im}A = M_{n,1}(\mathbb{K})$
10) Pour tout vecteur colonne $B$, le système $AX=B$ admet une unique solution où $X$ est un vecteur colonne inconnu.

(Ker$A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes $X$ tels que $AX=0$ et Im$A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes de la forme $AX$ où $X$ est un vecteur colonne quelconque.)

**Remarque.** $AB=0 \not\Rightarrow BA=0$ mais $AB=I_n \Rightarrow BA=I_n$.

**Produit de deux matrices élémentaires.**
Soient $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de format $(n,p)$ et $E_{k,l}$ de format $(p,q)$ alors

$$E_{i,j}\times E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

**Demonstration.** Le coeffient ligne $u$, colonne $v$ de ce produit vaut

$$\sum_{w=1}^{p}\delta_{u,i}\delta_{w,j}\delta_{w,k}\delta_{v,l} = \delta_{u,i}\delta_{v,l}\sum_{w=1}^{p}\delta_{w,j}\delta_{w,k} = \delta_{j,k}\delta_{u,i}\delta_{v,l} \text{ (obtenu quand } w=j)$$

qui est le coefficient ligne $u$, colonne $v$ de la matrice $\delta_{j,k}E_{i,l}$.

**3) Transposition.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de format $(n,p)$. La transposée de $A$ notée ${}^tA$ est la matrice de format $(p,n)$ dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$, vaut $a_{j,i}$.

**Théorème.** ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda{}^tA$. La transpositon est un isomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ sur l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}),+,.)$.

**Théorème.** ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. Si de plus $A$ est carrée, $A$ est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Les matrices carrées $A$ telles que ${}^tA = A$ sont les matrices symétriques. Leur ensemble est noté $S_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
Les matrices $A$ telles que ${}^tA = -A$ sont les matrices antisymétriques. Leur ensemble est noté $A_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est anti-symétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Ceci impose en particulier $\forall \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = 0$.

**Théorème.** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$. $\dim S_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**Demonstration.** L'endomorphisme $t$ de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée est involutif et est donc une symétrie. On sait alors que $M_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(t - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(t + \mathrm{Id}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.
(La décomposition d'une matrice $M$ est alors : $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.)
Une base de $S_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ et donc $\dim S_n(\mathbb{K}) = n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

## II -Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base donnée de $E$.
Soit $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. La matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ dans la base $\mathscr{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, est la matrice de format $(n,p)$ dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$, vaut la $i$-ème coordonnée de $x_j$ dans $\mathscr{B}$ (la $j$-ème colonne est $x_j$).

## III - Matrice d'une application linéaire

**1) Définition.** Soient $E$ et $F$ des espaces de dimensions respectives $n$ et $p$ et $f$ un élément de $\mathscr{L}(E,F)$.
Soient $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de $F$.
La matrice de $f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}f$, est la matrice de la famille $(f(e_j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}'$. Cette matrice est de de format $(p,n)$.
Le coefficient ligne $i$, colonne $j$, de cette matrice est la $i$-ème coordonnée dans $\mathscr{B}'$ de $f(e_j)$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B})).$$

Deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $E$ et $F$ respectivement étant fixées, l'application qui à $f \in \mathscr{L}(E,F)$ associe sa matrice relativement à ces bases est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice car entièrement déterminée par l'image d'une base) et en particulier $\mathrm{Mat}(f+g) = \mathrm{Mat}f + \mathrm{Mat}g$ et $\mathrm{Mat}(\lambda f) = \lambda\mathrm{Mat}(f)$.

**2) Ecriture matricielle d'une application linéaire.**
On conserve les notations de 1). Soient $x$ un vecteur de $E$ puis $y = f(x)$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur $x$ dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur $y$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Alors

$$Y = AX.$$

**Demonstration.** $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}e'_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right) e'_i$ et pour $i \in [\![1,p]\!]$, $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ qui est bien le coefficient ligne $i$ de $AX$.

Une conséquence importante est :
**Théorème.** • $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
• Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.
• $f$ bijective de $E$ sur $E'$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(f^{-1}\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))^{-1}$
• Si $f \in GL(E)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.

## IV - Changement de bases

**1) Matrice de passage.** Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$.
La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou aussi $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{B}'}$ ou $\mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
On montre facilement les formules $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$ et en particulier $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = I_n$. Donc toute matrice de passage est inversible et $(\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ et réciproquement, toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage.

**2) Changement de bases**

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ et soit $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soient $x$ un vecteur de $E$ puis $X$ (resp. $X'$) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $x$ dans $\mathscr{B}$ (resp. dans $\mathscr{B}'$) alors

$$X = PX'.$$

**Démonstration.** $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j' e_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i\right) = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j'\right) e_i$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j'$ qui est bien le coefficient ligne $i$ de $PX'$.

**3) Changement de bases et applications linéaires.**

**a) Cas général.**
Soient $E$ un espace de dimension $n$ muni de deux bases $b$ et $b'$ et $P$ la matrice de passage de $b$ à $b'$.
Soient $F$ un espace de dimension $p$ muni de deux bases $\beta$ et $\beta'$ et $Q$ la matrice de passage de $\beta$ à $\beta'$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$.
Soit $A$ (resp. $B$) la matrice de $f$ relativement aux bases $b$ et $\beta$ (resp. $b'$ et $\beta'$). Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

**Démonstration.**
• **Lemme.** Soient $M$ et $N$ deux matrices de format $(n,p)$ telles que pour tout vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a $MX = NX$, alors $M = N$.
En effet, si $f$ et $g$ sont les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrices respectives $M$ et $N$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors pour tout $x$ de $\mathbb{K}^p$, $f(x) = g(x)$ et donc $f = g$ puis $M = N$.
• $Y = AX$ donc $QY' = APX'$. Donc $BX' = Y' = (Q^{-1}AP)X'$ et ceci pour tout vecteur colonne $X'$.

**b) Cas particulier d'un endomorphisme.**
Soient $E$ un espace de dimension $n$ muni de deux bases $b$ et $b'$ et $P$ la matrice de passage de $b$ à $b'$.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans $b$ et $B$ dans $b'$. Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

**4) Matrices équivalentes, matrices semblables.**

**Définition.** Soient $A$ et $B$ deux matrices rectangulaires (éventuellement carrées) de format $(n,p)$.
$A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si il existe $P$ matrice carrée inversible de format $n$ et $Q$ matrice carrée inversible de format $p$ telles que $B = QAP$.
Deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases comme décrit en 3).
Deux matrices équivalentes ont même rang.

**Définition.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de format $n$. $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si il existe $P$ matrice carrée inversible de format $n$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Deux matrices $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases comme décrit en 3).
Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse en général ne serait-ce que parce que deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement carrées.
Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, mêmes propriétés de calculs ....

## V - Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de format $(n,p)$. Les lignes de $A$ seront notées $L_1$,..., $L_n$ et les colonnes de $A$ seront notées $C_1$,..., $C_p$.

### 1) Définitions et premières propriétés.

**Définition.** Le rang de $A$ est la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par la famille des vecteurs colonnes de $A$.

Exemple. (écriture générale des matrices de rang $1$).
Soit $A$ une matrice de format $(n,p)$ et de rang $1$. Ses colonnes sont dans la droite engendrée par une certaine colonne non nulle $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Plus précisément, pour $j \in [\![1,p]\!]$, $C_j$ s'écrit $v_jU$ où les $v_j$ ne sont pas tous nuls.
Si on pose $V = (v_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, alors $A = U^tV = (u_iv_j)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ où $U$ et $V$ sont non nuls. Réciproquement, une telle matrice est bien de rang $1$.

**Théorème.** $\text{rg}A \leqslant \text{Min}\{n,p\}$.
**Théorème.** Soit $\mathscr{F}$ une famille de $p$ vecteurs d'un espace $E$ de dimension $n$ telle que $A$ soit la matrice de $\mathscr{F}$ dans une certaine base de $E$ alors $\text{rg}A = \text{rg}\mathscr{F}$.
**Théorème.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $\mathscr{B}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}'$ une base de $F$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$ de matrice $A$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ alors $\text{rg}A = \text{rg}f$.
**Théorème.** Une matrice carrée de format $n$ est inversible si et seulement si son rang est $n$.
**Théorème.** $\text{rg}(AB) \leqslant \text{Min}\{\text{rg}A, \text{rg}B\}$ et $\text{rg}(A+B) \leqslant \text{rg}A + \text{rg}B$.
**Théorème.** Soit $A$ une matrice de format $(n,p)$. Soit $P$ une matrice carrée inversible de format n et $Q$ une matrice carrée inversible de format $p$ alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}A$ et $\text{rg}(AQ) = \text{rg}A$.
**Démonstration.** $\text{rg}(PA) \leqslant \text{rg}A$ puis $\text{rg}A = \text{rg}(P^{-1}PA) \leqslant \text{rg}PA$.

### 2) Rang et matrices extraites.

**Théorème.** Le rang de $A$ est le format maximum d'une matrice carrée extraite de $A$ et inversible.

### 3) Opérations élémentaires.

On utilise les trois opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes suivantes :
1) Echange de deux colonnes (resp.de deux lignes) . Codage : $C_i \leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i \leftrightarrow L_j$) avec $i \neq j$.
2) Multiplication d'une colonne (resp. d'une ligne) par $\lambda$ scalaire non nul. Codage : $C_j \leftarrow \lambda C_j$. (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$).
3) Ajout de la colonne (resp.ligne) $j$ à la colonne (resp.ligne) $i$ avec $i \neq j$. Codage : $C_i \leftarrow C_i + C_j$ (resp. $L_i \leftarrow L_i + L_j$)

On peut ajouter à ces opérations élémentaires deux opérations moins élémentaires obtenues en combinant les transformations précédentes.
1) permutation des colonnes (resp. des lignes)
2) ajout à une colonne (resp. ligne) d'une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes))

### 4) Interprétation des opérations élémentaires en terme de calcul matriciel.

#### a) Produit d'une matrice par une matrice élémentaire.

On considère $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p}$ une matrice rectangulaire de format $(n,p)$.
Calculons le produit de $A$ par une matrice élémentaire $E_{i,j}$ ayant un format adapté.

$$AE_{i,j} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p} \delta_{l,i}a_{k,l}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

c'est-à-dire :

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{0} & \phantom{\dots} & \phantom{0} & \text{j-ème colonne} & \phantom{0} & \phantom{\dots} & \phantom{0} \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$ (la $i$-ème colonne de $A$ se retrouve en $j$-ème position).

De même, $$E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}E_{i,k} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & \dots & a_{j,p} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$ (la $j$-ème ligne de $A$ se retrouve en $i$-ème position).

**b) Echange de deux colonnes (ou de deux lignes) :** $C_i \leftrightarrow C_j$
Soient $i$ et $j$ deux indices distincts puis $P_{i,j}$ la matrice carrée de format $p$ (resp. $n$) définie par

$$P_{i,j} = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \text{ (resp. } I_n - \text{ ...)}$$

D'après le calcul préliminaire, il est clair que $AP_{i,j}$ se déduit de la matrice $A$ par échange des colonnes $i$ et $j$ et que $P_{i,j}A$ se déduit de $A$ par échange des lignes $i$ et $j$.
**Théorème.** $P_{i,j}$ est inversible.

**c) Multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire $\lambda$ non nul :** $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
Soient $j \in [\![1, p]\!]$ puis $\lambda$ un scalaire non nul.
Soit $\Lambda_j(\lambda)$ la matrice carrée de format $p$ définie par

$$\Lambda_j(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{j,j}.$$

D'après le calcul préliminaire, il est clair que $A\Lambda_j(\lambda)$ se déduit de $A$ par multiplication par $\lambda$ de la colonne $j$. Résultat analogue pour les lignes.
**Théorème.** Si $\lambda \neq 0$, $\Lambda_j(\lambda)$ est inversible.

**d) Ajout d'une colonne à une autre colonne (d'une ligne à une autre ligne) :** $C_i \leftarrow C_i + C_j$.
Soient $i$ et $j$ deux éléments de $[\![1, p]\!]$ (resp. $[\![1, n]\!]$) distincts.
Soit $\Lambda_{i,j} = I_p + E_{j,i}$ (resp.$I_n + E_{i,j}$).
D'après le calcul préliminaire, il est clair que $A\Lambda_{j,i}$ se déduit de $A$ en ajoutant $C_j$ à $C_i$ et que $\Lambda_{i,j}A$ se déduit de $A$ en ajoutant $L_j$ à $L_i$.

**Théorème.** $\Lambda_{i,j}$ est inversible.
**Remarque.** On peut étoffer les opérations élémentaires avec $\Lambda_{i,j}(\lambda) = I_p + \lambda E_{j,i}$ qui rajoutera $\lambda$ fois une colonne à une autre.

**5) Opérations élémentaires et rang.**
**Théorème.** Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.
**Démonstration.** La multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible ne modifie pas le rang de cette matrice.

**6) Méthode du pivot de Gauss.**
**Lemme du pivot de Gauss.**
Soit $A$ une matrice de format $(n, p)$ dont la première ligne est non nulle.
$A$ peut être transformée par opérations élémentaires en une matrice $A_1$ de même format de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A_1' \end{pmatrix} \text{ où } \mathrm{rg}A_1 = \mathrm{rg}A \text{ (ou encore } \mathrm{rg}A_1' = \mathrm{rg}A - 1).$$

**Démonstration.** Si $a_{1,1} = 0$, il existe $j > 1$ tel que $a_{1,j}$ soit non nul. On échange alors la colonne $C_j$ et la colonne $C_1$ pour obtenir une matrice de même rang que A et dont le premier coefficient est non nul.
Puis par division de la première colonne de cette matrice par ce coefficient non nul, on obtient une matrice de même rang que A dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1.
Il reste enfin à remplacer chaque colonne $C_j$ d'indice $j > 1$ et de premier coefficient $a'_{1,j}$ par $C_j - a'_{1,j}C_1$ pour parvenir à la forme voulue sans avoir modifié le rang de A.

**Détermination du rang de $A$ par la méthode du pivot de Gauss.**
Si $A$ est nulle, $\mathrm{rg}A = 0$. Sinon, quite à échanger deux lignes de $A$ ce qui ne modifie pas son rang, on se ramène à une matrice dont la première ligne est non nulle et $A$ a même rang qu'une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A_1' \end{pmatrix}$. Le rang de $A$ est $1 + \mathrm{rg}A_1'$ car la première colonne de $A'$ et les $p-1$ dernières engendrent des sous espaces supplémentaires.

En réitérant, $A$ a même rang qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & \\ & & \times & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \times & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Le rang de A est le nombre de colonnes non nulles de cette dernière matrice.

**7) Rang et matrices équivalentes.**
**Théorème.** Soit $A$ une matrice de format $(n, p)$ et de rang $r$ non nul. $A$ est équivalente à la matrice $J_r$ de format $(n, p)$ définie par blocs :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } I_r \text{ est la matrice identité de format } r.$$

Réciproquement, une matrice équivalente à $J_r$ est de rang $r$.

**Démonstration 1.** Dans la démonstration précédente, on a multiplié $A$ à droite par des matrices inversibles dont le produit est noté $V$ pour obtenir $AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & \\ & & \times & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \times & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

De la même façon, on peut encore multiplier à gauche cette dernière matrice par un produit de matrices inversibles noté $U$ pour obtenir $UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$ ou encore $A = U^{-1}J_rV^{-1}$ ce qui montre que toute matrice de rang $r$ est équivalente à la matrice $J_r$.

**Démonstration 2.** Soit $A$ une matrice de format $(n, p)$ et de rang $r$ non nul.
Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice $A$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
D'après le théorème du rang, dim(Kerf) $= p - r$. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_i)_{r+1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de Kerf si $r < p$ ou $\mathscr{B}_0 = \varnothing$ si $r = p$. $\mathscr{B}_0$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ que l'on peut compléter en $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ base de $\mathbb{K}^p$. On sait que la restriction de $f$ à $\text{Vect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est un isomorphisme de $\mathtt{textVect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sur Imf. Par suite, si on pose $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e'_i = f(e_i)$, la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une base de Imf que l'on peut compléter en une base $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$.
La matrice de $f$ relativement aux bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ est la matrice $J_r$ ce qui montre encore une fois que $A$ est équivalente à $J_r$.

**Théorème.** Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si ces deux matrices ont même rang.
**Théorème.** $\text{rg}A = \text{rg}({}^tA)$.

## VI - Matrices de permutations

**1) Définition.** Soit $\sigma$ une permutation de $[\![1, n]\!]$. La matrice $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice (de permutation) associée à $\sigma$. Le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $P_\sigma$ vaut $1$ si $i = \sigma(j)$ et $0$ sinon.

Exemple. Si $\sigma = (4213)$ alors $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2) Propriétés.**
**Théorème.** $\forall (\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.
**Démonstration.** Le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} \text{ (obtenu pour } k = \sigma'(j))$$

qui est bien le coefficient ligne $i$, colonne $j$, de $P_{\sigma \circ \sigma'}$.

**Théorème.** $\forall \sigma \in S_n$, $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.
**Théorème.** Soit $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ isomorphe à $(S_n, \circ)$.

**Théorème.** $\forall \sigma \in S_n$, $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ (signature)
**Démonstration.**

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} ... p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} ... \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

(car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} ... \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(k) = \sigma'(k) \Leftrightarrow \sigma = \sigma'$.)

**3) Produit d'une matrice par une matrice de permutation.**
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice de format $(p, n)$ et $P_\sigma$ la matrice associée à $\sigma$ permutation donnée de $[\![1, n]\!]$ (resp. $[\![1, p]\!]$). Alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)})$ (resp. $P_\sigma A = \begin{pmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ \dots \\ L_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$).

**Démonstration.** Le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $AP_\sigma$ vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$ et le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $P_\sigma A$ vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j}$.

## VII - Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme

### 1) Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée. La trace de $A$ est le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

### 2) Propriétés.

**Théorème.** La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}2$, $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{Tr}(\lambda A+\mu B) = \lambda\mathrm{Tr}A+\mu\mathrm{Tr}B$.
**Théorème.** $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}A$.
**Théorème.** $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
**Démonstration.** $\displaystyle\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}\right) = \mathrm{Tr}(BA)$.

**Théorème.** Deux matrices semblables ont même trace.
**Démonstration.** $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}A$.

**Danger.** $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$ en général. Par exemple, $\mathrm{Tr}(E_{1,1}\times E_{1,2}\times E_{2,1}) = \mathrm{Tr}(E_{1,1}) = 1$ et $\mathrm{Tr}(E_{1,1}\times E_{2,1}\times E_{1,2}) = \mathrm{Tr}(0) = 0$.

### 3) Trace d'un endomorphisme.

La trace d'un endomorphisme $f$ d'un espace $E$ de dimension $n$ est la trace de sa matrice dans une base donnée de $E$ (ne dépend pas du choix de la base puisque deux matrices semblables ont mêmes traces).

## VIII - Calculs par blocs

### 1) Combinaisons linéaires.

On découpe une matrice $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p}$ de format $(n,p)$ en blocs (ou cellules) $A_{i,j}$ de format $(n_i,p_j)$ où $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant t$ et $n_1+\ldots+n_s = n$, $p_1+\ldots+p_t = p$.
Avec des notations évidentes, si $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant t}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant t}$ alors $\lambda A+\mu B = (\lambda A_{i,j}+\mu B_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant t}$.

### 2) Multiplication.

Pour calculer par blocs le produit $AB$, le découpage de $A$ en colonnes doit être identique au découpage de $B$ en lignes.
On découpe une matrice$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ de format $(n,p)$ en $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant s}$ où $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant t$ et $n_1+\ldots+n_r = n$, $p_1+\ldots+p_s = p$ et une matrice $B = (b_{k,l})_{1\leqslant k\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q}$ de format $(p,q)$ en $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant t}$ où $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant t$ et $p_1+\ldots+p_s = p$, $q_1+\ldots+q_t = q$.

Si, pour $1\leqslant i\leqslant r$ et $1\leqslant j\leqslant t$, on pose $\displaystyle C_{i,j} = \sum_{k=1}^{s} A_{i,k}B_{k,j}$, alors $AB = (C_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant t}$.

  