

# Fractions rationnelles

Soit  $F = \frac{P}{Q}$ ,  $P$  et  $Q$  polynômes tous deux non nuls.

## 1ère étape de la décomposition.

S'assurer que  $F$  est sous forme irréductible et pour cela déterminer d'abord la décomposition de  $Q$  en produit de facteurs irréductibles.

**Définition.** Un polynôme  $P$  non constant à coefficient dans  $\mathbb{K}$  est dit irréductible sur  $\mathbb{K}$  si et seulement s'il n'existe pas deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  tels que  $P = P_1 P_2$  et  $\deg(P_1) < \deg(P)$  et  $\deg(P_2) < \deg(P)$  (les constantes ne sont pas des polynômes irréductibles de même que 1 n'est pas un nombre premier).

**Théorème.** (Décomposition en produit de facteurs irréductibles).

Pour tout élément  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  non constant, il existe une unique constante non nulle  $C$ , une unique famille  $(P_1, P_2, \dots, P_k)$  de polynômes unitaires (unique à l'ordre près des facteurs), irréductibles sur  $\mathbb{K}$  et deux à deux distincts et une unique

suite d'exposants tous non nuls  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  tels que  $P = C \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$ .

**Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS.** Les polynômes irréductibles sur  $\mathbb{C}$  sont les polynômes de degré 1 exactement.

**Corollaire.** Les polynômes réels irréductibles sur  $\mathbb{R}$  sont les polynômes de degré un et de degré deux à discriminant strictement négatif. (tout autre type de polynôme non constant se factorise de manière non triviale même s'il n'a pas de racine réelle. Par exemple, un polynôme de degré 4 se factorise nécessairement de manière non triviale).

Pour factoriser sur  $\mathbb{R}$ , on peut factoriser sur  $\mathbb{C}$  puis **regrouper les facteurs conjugués**, ce qui impose de trouver toutes les racines, mais **ce n'est pas l'unique méthode**.

Les exemples les plus fréquents :

(1)  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

(2)  $X^2 + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ .  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  sur  $\mathbb{C}$ .

(3)  $X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ .

(4)  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  sur  $\mathbb{R}$  (à partir de  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ).

$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$  sur  $\mathbb{C}$ . Les racines cubiques de 1 sont 1,  $j$  et  $j^2$  et donc  $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ .

Au passage, sur le nombre  $j$ , on doit savoir :

$$j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j} = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, j^3 = 1.$$

$1 + j + j^2 = 0$  et donc  $1 + j^2 = -j$ ,  $1 + j = -j^2$  et  $j + j^2 = -1$ .

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $j^{3n} = 1$ ,  $j^{3n+1} = j$  et  $j^{3n+2} = j^2$ .

(5)  $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$  sur  $\mathbb{R}$  (en remplaçant  $X$  par  $-X$  ou en utilisant  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ )

$X^3 + 1 = (X + 1)(X + j)(X + j^2)$  sur  $\mathbb{C}$  (les racines de ce polynôme sont bien sûr les opposées des racines précédentes à savoir  $-1 = e^{i\pi}$ ,  $-j = e^{-i\pi/3}$  et  $-j^2 = e^{i\pi/3}$ ) et donc  $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$  sur  $\mathbb{C}$ .

(6)  $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$  sur  $\mathbb{R}$  (à partir de  $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ )

$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)$  sur  $\mathbb{C}$  (les racines 4ème de 1 sont 1,  $i$ ,  $-1$  et  $-i$ )

(7)  $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$  sur  $\mathbb{C}$  (les racines 4ème de  $-1$  peuvent être obtenues ainsi :  $e^{i\pi/4}$  est évidemment l'une d'entre elles et d'autre part, par parité et réalité du polynôme  $X^4 + 1$ , on a aussi son conjugué  $e^{-i\pi/4}$ , son opposé  $-e^{i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$  et l'opposé de son conjugué  $-e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$ )

Sur  $\mathbb{R}$ , il faut factoriser directement (et non pas passer par  $\mathbb{C}$ ) :

$$X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

(8)  $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)(X + j)(X - j^2)(X + j^2)$  sur  $\mathbb{C}$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , directement :  $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$ .

(9)  $X^6 + 1 = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - i)(X + i)(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$  sur  $\mathbb{C}$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , directement :

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2)^3 + 1 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= (X^2 + 1)((X^2 + 1)2 - 3X^2) = (X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Au passage  $X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ .

$$(10) \text{ Sur } \mathbb{C}, X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}).$$

Sur  $\mathbb{R}$ , il faut regrouper les conjugués en discutant suivant la parité de  $n$  :

- Si  $n = 2p$  est pair,  $X^{2p} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} \left( X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{p} + 1 \right)$ .
- Si  $n = 2p + 1$  est impair,  $X^{2p+1} - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^p \left( X^2 - 2X \cos \frac{2k\pi}{2p+1} + 1 \right)$ .

**2ème étape de la décomposition.** Ecrire l'allure générale de la décomposition en éléments simples de  $F$ .

**Théorème (hors programme).** (décomposition en éléments simples sur un corps quelconque (et par exemple sur  $\mathbb{Q}$ )).

Si  $Q = \prod_{i=1}^k Q_i^{\alpha_i}$  où les  $Q_i$  sont unitaires, irréductibles et deux à deux distincts (et  $P$  et  $Q$  premiers entre eux) alors

$$F = E + \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i \text{ où } E \text{ est un polynôme appelé la partie entière de } F \text{ et } \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \text{ avec } \deg(P_{i,j}) < \deg Q_i.$$

$\mathcal{P}_i$  est la partie polaire relative au facteur  $Q_i^{\alpha_i}$ . De plus la décomposition est unique.

**Théorème.** (décomposition sur  $\mathbb{C}$ ). La partie polaire relative au facteur  $(X - a)^n$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(X - a)^i}$  (avec  $\lambda_n \neq 0$ ) (éléments simples de 1ère espèce).

**Théorème.** (décomposition sur  $\mathbb{R}$ ).

La partie polaire relative au facteur  $(X - a)^n$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(X - a)^i}$  (avec  $\lambda_n \neq 0$ ) (et les  $\lambda_i$  réels) (éléments simples de 1ère espèce).

La partie polaire relative au facteur  $(X^2 + aX + b)^n$  avec  $a^2 - 4b < 0$  s'écrit :  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i X + \mu_i}{(X^2 + aX + b)^i}$  (avec  $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0, 0)$ ) (éléments simples de 2ème espèce).

**Utilisation de la parité et de la réalité.**

$$\text{Sur } \mathbb{C}, F = \frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i}.$$

$F$  est réelle donc  $F = \bar{F}$  ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i} = \frac{\bar{a}}{X - 1} + \frac{\bar{b}}{X + 1} + \frac{\bar{c}}{X + i} + \frac{\bar{d}}{X - i}$$

( $\bar{F}$  est la fraction rationnelle dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $F$  (on ne conjugue pas  $X$ ) et par unicité de la décomposition en éléments simples :  $\bar{a} = a$  (c'est-à-dire  $a$  est réel)  $\bar{b} = b$ ,  $d = \bar{c}$ . En pratique, si  $F$  est réelle, on ne détaille pas ce qui précède et on écrit directement un élément simple suivi de son conjugué :

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i}, \text{ } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

$F$  est paire donc  $F(X) = F(-X)$  ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i} = -\frac{a}{X + 1} - \frac{b}{X - 1} - \frac{c}{X + i} - \frac{\bar{c}}{X - i}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples :  $b = -a$  et  $\bar{c} = -c$ . Finalement,  $F = \frac{a}{X - 1} - \frac{a}{X + 1} + \frac{c}{X - i} - \frac{c}{X + i}$  avec  $a$  réel et  $c$  imaginaire pur. En pratique quand  $F$  est paire (resp. impaire), chaque fois qu'on écrit un élément simple, on lui ajoute (retranche) l'élément simple obtenu en remplaçant  $X$  par  $-X$  :

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{a}{-X - 1} \dots = \frac{a}{X - 1} - \frac{a}{X + 1} \dots$$

**3ème étape de la décomposition.** Déterminer la partie entière  $E$ . Son degré est  $\deg P - \deg Q$  si  $\deg P \geq \deg Q$  et  $E = 0$  sinon.  $E$  est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

$$\text{Par exemple, } \frac{X^7 - 1}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)} = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{X - i} + \frac{\bar{d}}{X + i}.$$

$$\begin{array}{r|l} X^7 & -1 \\ - (X^7 - X^3) & \\ \hline X^3 & -1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^4 - 1 \\ \hline X^3 \end{array} \right.$$

et donc  $E = X^3$  ou bien directement « à la main »

$$\frac{X^7 - 1}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)} = \frac{X^7 - X^3 + X^3 - 1}{X^4 - 1} = X^3 + \frac{X^3 - 1}{X^4 - 1}.$$

On peut obtenir le terme de plus degré grâce à un équivalent :  $\frac{x^7 - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$  et donc  $a_3 = 1$ .

**4ème étape de la décomposition.** Déterminer chaque partie polaire.

**a) Partie polaire relative à un pôle simple.** Si  $Q$  est factorisé, utiliser  $\lambda = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$ .

Exemple.  $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X + 3} + \frac{c_1}{X - 1} + \frac{c_2}{(X - 1)^2} + \frac{c_3}{(X - 1)^3}$ .

$a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \frac{2 \times 0 + 1}{(0 - 1)^3(0 + 3)} = -\frac{1}{3}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -3} (x + 3)F(x) = -\frac{5}{192}$  (et  $c_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 F(x) = \frac{3}{4}$ )

Si  $Q$  est développé, utiliser plutôt  $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ .

Exemple. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  la fraction  $F = \frac{1}{X^n - 1} = \frac{P}{Q}$ .

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{2ik\pi/n}, \lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n} \text{ et } \frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$

**b) Partie polaire relative à un pôle multiple.** La méthode générale (division suivant les puissances croissantes) a été supprimée des programmes. Il ne reste donc que la « débrouille ».

Exemple.  $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} = -\frac{1}{3X} - \frac{5}{192(X + 3)} + \frac{c_1}{X - 1} + \frac{c_2}{(X - 1)^2} + \frac{c_3}{(X - 1)^3}$ .

- $c_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 F(x) = \frac{2 \times 1 + 1}{1 \times (1 + 3)} = \frac{3}{4}$ .
- $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = -\frac{1}{3} - \frac{5}{192} + c_1$  et donc  $c_1 = \frac{69}{192} = \frac{23}{64}$ .
- $x = 2$  fournit  $\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{192} + \frac{69}{192} + c_2 + \frac{3}{4}$  et donc  $c_2 = -\frac{7}{16}$ .

ou bien  $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} - \frac{3}{4(X - 1)^3} = \frac{4(2X + 1) - 3X(X + 3)}{4X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{-3X^2 - X + 4}{4X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{-3X - 4}{4X(X - 1)^2(X + 3)}$  puis

$$c_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \left( F(x) - \frac{3}{4(x - 1)^3} \right) (x - 1)^2 \right) = -\frac{7}{16}$$

**c) Élément simple de 2ème espèce sur  $\mathbb{R}$  « à l'exposant 1 ».**

On généralise l'idée pour un pôle simple :

Exemple 1.  $\frac{X^2 - 7X + 1}{(X^2 + 1)(X - 1)^2} = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X - 1)^2}$  avec  $a, b, c$  et  $d$  réels.

$a_i + b = \lim_{x \rightarrow i} (x^2 + 1)F(x) = \frac{i^2 - 7i + 1}{(i - 1)^2} = \frac{7}{2}$  et puisque  $(1, i)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  :  $b = \frac{7}{2}$  et  $a = 0$ .

Exemple 2.  $\frac{X^3 - X}{X^4 + 1} = \frac{aX + b}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{aX - b}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$  (car la fraction est impaire).

**1ère idée pour déterminer a et b.** Soit  $\omega = e^{i\pi/4}$  ( $\omega$  est l'une des deux racines de  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ ).

$a\omega + b = \lim_{x \rightarrow \omega} (x^2 - \sqrt{2}x + 1)F(x) = \frac{\omega^3 - \omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} = \frac{\omega^3 - \omega}{2\sqrt{2}\omega} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega^2 - 1) = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}$  (car  $\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1 = 0$ )

Puisque  $(1, \omega)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  (car  $\omega$  n'est pas réel), on obtient  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**2ème idée pour déterminer a et b.** On décompose sur  $\mathbb{C}$  puis on réduit au même dénominateur les fractions conjuguées.

$$\frac{X^3 - X}{X^4 + 1} = \frac{a}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{a}}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{a}{X + e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{a}}{X + e^{-i\pi/4}}.$$

$$a = \frac{\omega^3 - \omega}{4\omega^3} = \frac{1}{4}(1 + \omega^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega \quad (\text{car } \omega^4 = -1 \text{ et } \omega - \sqrt{2}\omega + 1 = 0).$$

$$\text{Ensuite, } \frac{a}{X - \omega} + \frac{\bar{a}}{X - \bar{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\omega(X - \bar{\omega}) + \bar{\omega}(X - \omega)}{X^2 - (\omega + \bar{\omega})X + \omega\bar{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}X - 2}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}.$$