Planche n° 14. Topologie des espaces vectoriels normés

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Exercice n° 2 (* I)**

1) Inégalités de Hölder et de Minkowski. Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

a) Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{x^q}{q}$.

b) En déduire que $\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$.

c) En déduire que $\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$.

2) Soit α un réel strictement positif. Pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x)=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}$.

a) Montrer que $\forall\alpha \geqslant 1$, N_α est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Dessiner les « boules unités » de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\dfrac{2}{3},1,\dfrac{3}{2},2,+\infty\right\}$.

c) Montrer que, pour $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ fixé, $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x)=\mathrm{Max}\{|x_k|,\ 1\leqslant k\leqslant n\}=N_\infty(x)$.

d) Montrer que si $0<\alpha<1$, N_α n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n\geqslant 2$).

Exercice n° 3 (I)**

Soit $E=C^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f)=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,dt$, $N'(f)=|f(0)|+\displaystyle\int_0^1|f'(t)|\,dt$ et $N''(f)=|f(0)|+|f'(0)|+\displaystyle\int_0^1|f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Exercice n° 4 (* I) (topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)**

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n\geqslant 2$).
3) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
4) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5) Soit $p\in[\![0,n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
7) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$) est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
8) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice n° 5 (**)

Montrer qu'entre deux rationnels distincts, il existe un irrationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice n° 6 (**)

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$ et $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$.

2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.
5) $\overset{\circ}{A \setminus B} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.
6) $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Exercice n° 7 (**)

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Exercice n° 8 (**)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\|\ \|_\infty$.
D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

Exercice n° 9 (I) (Distance d'un point à une partie)**

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.
Pour $x \in E$, on pose $d_A(x) = d(x, A)$ où $d(x, A) = \text{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

1) Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.

2) a) Montrer que si A est fermée, $\forall x \in E$, $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x \in E$, $\exists a \in A /\ d_A(x) = \|x - a\|$.

3) Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.

4) Montrer d_A est continue sur E.

5) A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est injective.

6) Dans l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A = \left\{ f \in E /\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \geqslant 1 \right\}$. Calculer $d_A(0)$.

Exercice n° 10 (**)

1) Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.
2) Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

Exercice n° 11 (***)

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Exercice n° 12 (***)

Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{\alpha \in]0,\pi[} \left\{ \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}$.

Exercice n° 13 (* I)**

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice n° 14 (* I) :**

Donner un développement à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ de la n-ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

Exercice n° 15 (* I)**

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.