Planche n° 16. Suites et séries matricielles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a}{n}\\ \dfrac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Exercice n° 2 (***)

Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p\geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}A^n=0$
(3) La série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge.

Exercice n° 3 (**)

Soit $A=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ 5/3 & -7/6\end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$.

Exercice n° 4 (I)**

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\|<1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A^n=(I-A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I-A)^{-1}-(I+A)\|\leqslant\dfrac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Exercice n° 5 (I)**

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geqslant p_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 6 (I)**

Calculer $\exp(tA)$, $t\in\mathbb{R}$, si **1)** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **2)** $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ -10 & -4 & -2\end{pmatrix}$

Exercice n° 7 (**)

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -2\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3+tA)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Exercice n° 8 (**)

Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(I_n+\dfrac{A}{p}\right)^p$.

Exercice n° 9 (**)

Montrer que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.