Probabilités

Tribu

Exercice 1 [03995] [Correction]
Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

Exercice 2 [03997] [Correction]
Soient $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Vérifier que

$$\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(A') \,\middle|\, A' \in \mathcal{T}'\right\}$$

définit une tribu sur Ω.

Exercice 3 [03998] [Correction]

(a) Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribu sur un même ensemble Ω.
Montrer que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu sur Ω.

(b) Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ la famille de toutes les tribus de Ω contenant les éléments de $\mathcal{S}$.
Vérifier que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$ et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.

Exercice 4 [03999] [Correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

(a) Vérifier que

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n$$

est un évènement. À quelle condition simple sur la suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'évènement A sera-t-il réalisé ?

(b) Même question avec

$$A' = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n.$$

Exercice 5 [04006] [Correction]
Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω vérifiant

$$n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n \,\middle|\, T \in \wp(\mathbb{N}) \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.

(b) On suppose l'ensemble Ω dénombrable.
Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Existe-t-il des tribus dénombrables ?

Exercice 6 [04007] [Correction]
Dans ce sujet dénombrable signifie « au plus dénombrable ».
Soit Ω un ensemble. On introduit

$$\mathcal{T} = \left\{A \subset \Omega \,\middle|\, A \text{ ou } \overline{A} \text{ est dénombrable}\right\}.$$

(a) Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

(b) Justifier que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.

(c) Vérifier que si Ω est dénombrable alors $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$.

Exercice 7 [04008] [Correction]
Soit une application $f : \Omega \to \Omega'$ et l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{A \subset \Omega \,\middle|\, A = f^{-1}\big(f(A)\big)\right\}.$$

Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

Définition d'une probabilité

Exercice 8 [04002] [Correction]
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$.
Montrer que

$$\mathrm{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 9 [04016] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\big(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N})\big)$ vérifiant

$$\mathrm{P}\big(\{n, n+1, \ldots\}\big) = \lambda a_n.$$

Exercice 10 [04009] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Pour $A, B \in \mathcal{T}$, on pose

$$d(A,B) = \mathrm{P}(A\Delta B)$$

avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

(a) Vérifier

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C).$$

(b) En déduire

$$\big|\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)\big| \leq \mathrm{P}(A\Delta B).$$

Calcul de probabilité d'événements

Exercice 11 [04098] [Correction]
On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geq 1$.

(c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

(d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 12 [04110] [Correction]
Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \text{ avec } \lambda \simeq 2.$$

En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Exercice 13 [05000] [Correction]
On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on introduit les événements :

A_n = « On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences »,
B_n = « On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n-1$ et n ».

Enfin, on pose $p_n = \mathrm{P}(B_n)$ et $p_1 = 0$.

(a) Calculer p_2, p_3 et p_4.

(b) Pour $n \geq 2$, vérifier

$$\mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{et} \quad p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

(c) En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour tout $n \geq 1$.

(d) Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Probabilités composées

Exercice 14 [03996] [Correction]
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

(a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?

(b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

(c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 15 [04014] [Correction]
Chaque jour du lundi au vendredi, le professeur Zinzin a la probabilité $p \in]0;1[$ d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.

(a) Quelle est probabilité que le professeur Zinzin ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi ?

(b) Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte ?

Exercice 16 [04015] [Correction]
Deux entreprises asiatiques produisent des « langues de belle-mère » en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !

(a) Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?

(b) Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Exercice 17 [04147] [Correction]
Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule

$$p_n = a\frac{2^n}{n!} \text{ avec } a > 0.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou garçon.

(b) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

(c) On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

Événements Indépendants

Exercice 18 [04013] [Correction]

(a) Soit $(A_1,\dots,A_n)$ une famille d'évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $\widetilde{A_i} = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Vérifier la famille $(\widetilde{A_1},\dots,\widetilde{A_n})$ est constituée d'évènements mutuellement indépendant.

(b) Etendre le résultat au cas d'une famille $(A_i)_{i\in I}$.

Exercice 19 [04081] [Correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)\right).$$

Exercice 20 [04109] [Correction]
Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

(a) Démontrer

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_k}).$$

(b) On suppose $\mathrm{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{P}\big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\big) = 1$;
(ii) $\sum \ln\big(\mathrm{P}(\overline{A_n})\big)$ diverge ;
(iii) $\sum \mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 21 [04947] [Correction]
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

(a) Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $\big(\lambda n^{-s}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

(b) Pour p nombre premiers, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.

(c) Prouver

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

(d) La famille $(1/p)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?