Fonctions vectorielles d'une variable vectorielle

Limites

Exercice 1 [01736] [Correction]
Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$

(b) $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

Exercice 2 [00478] [Correction]
Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^4}$

(c) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(d) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$

Exercice 3 [00068] [Correction]
Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$

(c) $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln x}$

(d) $f(x,y) = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

Exercice 4 [00480] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^y$ pour $x > 0$ et $f(0,y) = 0$.

(a) Montrer que f est une fonction continue.

(b) Est-il possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?

Exercice 5 [01737] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}.$$

Déterminer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Continuité

Exercice 6 [01738] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 7 [01741] [Correction]
Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit a et b deux points de A et y un réel tels que $f(a) \leq y \leq f(b)$.
Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 8 [00482] [Correction]
Soient $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

(a) Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

(b) Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.

Exercice 9 [01112] [Correction]
Soient E_1 et E_2 deux parties fermés d'un espace vectoriel normé E telles que

$$E = E_1 \cup E_2.$$

Montrer qu'une application $f\colon E \to F$ est continue si, et seulement si, ses restrictions f_1 et f_2 au départ de E_1 et de E_2 le sont.

Lipchitzianité

Exercice 10 [01734] [Correction]
Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$. On note

$$d(x,A) = \inf_{a\in A}\|x-a\|.$$

Montrer que l'application $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Exercice 11 [00475] [Correction]
Soit E l'espace formé des fonctions réelles définies sur $[a\,;b]$, lipschitziennes et s'annulant en a.
Montrer que l'application $N\colon E\to\mathbb{R}$ qui à $f\in E$ associe le réel

$$N(f) = \inf\left\{k\in\mathbb{R}_+ \,\middle|\, \forall (x,y)\in[a\,;b]^2, \left|f(x)-f(y)\right| \leq k|x-y|\right\}$$

définit une norme sur E.

Exercice 12 [03052] [Correction]
Soient A une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et $\mathcal{L}$ le sous-espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

(a) Montrer que les éléments $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.

(b) Pour $f\in\mathcal{L}$, soit

$$K_f = \left\{k\in\mathbb{R}_+ \,\middle|\, \forall (x,y)\in A^2, N(f(x)-f(y)) \leq kN(x-y)\right\}.$$

Justifier l'existence de $c(f) = \inf K_f$ puis montrer $c(f)\in K_f$.

(c) Soient $a\in A$ et $N_a\colon \mathcal{L}\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$N_a(f) = c(f) + N(f(a)).$$

Montrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.

(d) Soient $a,b\in A$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 13 [00476] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé et $T\colon E\to E$ définie par

$$T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\|\leq 1\\ \frac{u}{\|u\|} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que T est au moins 2-lipschitzienne.

Exercice 14 [00477] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\max(1,\|x\|)}x.$$

Montrer que f est 2-lipschitzienne.
Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Continuité et linéarité

Exercice 15 [00485] [Correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
On suppose que, pour toute suite (u_n) tendant vers 0_E, la suite $\big(f(u_n)\big)$ est bornée.
Montrer que la fonction f est continue.

Exercice 16 [00486] [Correction]
Montrer que N_1 et N_2 normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, Id_E est bicontinue de (E,N_1) vers (E,N_2).

Exercice 17 [02832] [Correction]
Soient d un entier naturel et (f_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus d. On suppose que cette suite converge simplement.
Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d, la convergence étant de plus uniforme sur tout segment.

Exercice 18 [03717] [Correction]
E désigne un espace vectoriel normé par N.
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose

$$\forall x\in E, N\big((p-q)(x)\big) < N(x).$$

Montrer que p et q sont de même rang.

Exercice 19 [03786] [Correction]
On munit $E=\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme

$$\|M\| = \max_{1\leq i,j\leq p}|m_{i,j}|.$$

(a) Soient X fixé dans $\mathbb{C}^p$ et P fixé dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$; montrer que

$$\phi(M) = MX \text{ et } \psi(M) = P^{-1}MP$$

définissent des applications continues.

(b) Montrer que

$$f(M,N) = MN$$

définit une application continue.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(\|A^n\|\right)$ soit bornée ; montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.

(d) Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (B^n) tende vers une matrice C. Montrer que $C^2 = C$; que conclure à propos du spectre de C ?
Montrer que les valeurs propres de B sont de module au plus égal à 1

Exercice 20 [01012] [Correction]
Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle a, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n.$$

(a) Justifier l'existence de $\langle a, u\rangle$.

(b) Montrer que l'application linéaire $\varphi_u : a \mapsto \langle a, u\rangle$ est continue.

(c) Même question avec $\psi_a : u \mapsto \langle a, u\rangle$.

Exercice 21 [03907] [Correction]
On note $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme N_∞. Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(u)$ et $\Delta(u)$ les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que les applications T et Δ sont des endomorphismes continus de E.

Exercice 22 [03908] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}\Big([0\,;1], \mathbb{R}\Big)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|.$$

Étudier la continuité de la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(1) - f(0)$.

Exercice 23 [03909] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0\,;1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On définit $T : E \to F$ par : pour tout $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, $T(f) : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est une application linéaire continue.

Exercice 24 [03910] [Correction]
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour f et φ éléments de E on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T_φ est une forme linéaire continue.

Exercice 25 [03911] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}\Big([0\,;1], \mathbb{R}\Big)$ muni de $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Étudier la continuité de la forme linéaire

$$\varphi : f \mapsto \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 26 [03912] [Correction]
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(0)\big| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} \big|P(t)\big|.$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que la dérivation est continue pour N_1.

(c) Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2.

(d) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 27 [03913] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.
Montrons que l'application $u\colon f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ est un endomorphisme continu de E.

Exercice 28 [03914] [Correction]
Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle a, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n.$$

(a) Justifier l'existence de $\langle a, u\rangle$.

(b) Montrer que l'application linéaire $\varphi_u\colon a \mapsto \langle a, u\rangle$ est continue.

(c) Même question avec $\psi_a\colon u \mapsto \langle a, u\rangle$.

Exercice 29 [02741] [Correction]
Soit $K \in \mathcal{C}\big([0\,;1]^2, \mathbb{R}\big)$ non nulle telle que

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, K(x,y) = K(y,x).$$

On note $E = \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f)\colon x \in [0\,;1] \to \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}.$$

(a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

(b) L'application Φ est-elle continue pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?

(c) Montrer que

$$\forall f, g \in E, (\Phi(f)\,|\,g) = (f\,|\,\Phi(g)).$$

Soit

$$\Omega = \left(\max_{0\le x\le 1} \int_0^1 \big|K(x,y)\big|\,\mathrm{d}y\right)^{-1}.$$

(d) Montrer

$$\forall \lambda \in \left]-\Omega\,;\Omega\right[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda\Phi(f).$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda \mathrm{Id}) \le \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0;1]^2} K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Connexité par arcs

Exercice 30 [01147] [Correction]
Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Exercice 31 [01149] [Correction]
Montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Exercice 32 [01148] [Correction]
Montrer que l'union de deux connexes par arcs non disjoints est connexe par arcs.

Exercice 33 [01153] [Correction]
Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Exercice 34 [01154] [Correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \ge 2$
Montrer que la sphère unité $S = \big\{x \in E \,\big|\, \|x\| = 1\big\}$ est connexe par arcs.

Exercice 35 [01155] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \ge 2$.

(a) Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \setminus H$ est-il connexe par arcs ?

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \le n-2$. L'ensemble $E \setminus F$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 36 [01157] [Correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 37 [01158] [Correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 38 [03867] [Correction]
Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs.

Exercice 39 [01151] [Correction]
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.
Indice : on peut considérer $\varphi(x,y) = f(x) - f(y)$ défini sur
$X = \left\{(x,y) \in I^2, x < y\right\}$.

Exercice 40 [01150] [Correction]
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que f' s'annule.

(a) Établir que $A = \left\{(x,y) \in I^2, x < y\right\}$ est une partie connexe par arcs de I^2.

(b) On note $\delta\colon A \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x,y) = f(y) - f(x)$. Établir que $0 \in \delta(A)$.

(c) Conclure en exploitant le théorème de Rolle

Exercice 41 [04078] [Correction]
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes. Montrer que N est une partie étoilée.