Fonctions vectorielles d'une variables réelles

Dérivation

Exercice 1 [00564] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$$

Montrer que f est linéaire

Exercice 2 [00565] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon \mathcal{C}^1([a\,;b[, E)$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $[a\,;b]$ si, et seulement si, f' admet une limite en b.

Exercice 3 [00566] [Correction]
Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

(a) Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$.

(b) En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 4 [00569] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\bigl(k/n^2\bigr).$$

Exercice 5 [02587] [Correction]
Soit u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). On suppose

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Formules de Taylor

Exercice 6 [00567] [Correction]

(a) Montrer que pour tout $0 \le p < n$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n!$$

(b) En déduire, pour $f\colon \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$, la limite quand $h \to 0$ de

$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(kh).$$

Exercice 7 [01732] [Correction]
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées.
Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\|f'\|_\infty^2 \le 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty.$$

Exercice 8 [00570] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } \bigl\|f(1)\bigr\| = 1.$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \ge 4$.

Arcs paramétrés

Exercice 9 [00579] [Correction]
Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t). \end{cases}$$

Exercice 10 [03965] [Correction]

(a) Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t). \end{cases}$$

(b) On note A et B les points d'intersection des axes (Ox) et (Oy) avec la tangente au point de paramètre $t \neq 0\ [\pi/2]$ de la courbe précédente. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

Exercice 11 [03966] [Correction]
(Cycloïde) Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t). \end{cases}$$

Exercice 12 [00585] [Correction]
(Lemniscate de Bernoulli)

(a) Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} \\ y = \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\cos^2(t)}. \end{cases}$$

(b) On introduit les points

$$F(1/\sqrt{2}, 0) \text{ et } F'(-1/\sqrt{2}, 0).$$

Montrer que pour tout point M de la courbe ci-dessus

$$MF \times MF' = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13 [03968] [Correction]
(Cardioïde) Étudier la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) + \sin(2t). \end{cases}$$

Exercice 14 [03970] [Correction]
Soit $t \mapsto f(t)$ définissant un arc régulier tel qu'en tout point de paramètre t la tangente soit

$$D_t\colon (t^3 + 3t)x - 2y = t^3.$$

Réaliser un paramétrage en coordonnées cartésiennes de l'arc étudié et le représenter.

Exercice 15 [03971] [Correction]

(a) Étudier la courbe

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3. \end{cases}$$

(b) Donner une équation de la tangente et de la normale en le point M de paramètre t.

(c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

Exercice 16 [03972] [Correction]

(a) Étudier et représenter la courbe définie par

$$\begin{cases} x = 4t^3 \\ y = 3t^4. \end{cases}$$

(b) Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

(c) Déterminer un paramétrage du lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe précédente orthogonales et figurer cette courbe.

Exercice 17 [04077] [Correction]
Soit D le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ du plan $\mathbb{R}^2$.
Montrer que les vecteurs tangents à D aux points du cercle limite sont orthogonaux au vecteur rayon.