Planche n° 17. Equations différentielles linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle proposée :

1) $y' + y = 1$ **2)** $2y' - y = \cos x$ **3)** $y' - 2y = xe^{2x}$ **4)** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ **5)** $y'' + 4y = \cos(2x)$
6) $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Exercice n° 2 (* I)**

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On suppose que quand x tend vers $+\infty$, $f' + \alpha f$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers $\dfrac{\ell}{\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f + f' + f'')(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
On note D l'opérateur de dérivation. Soit P un polynôme de degré n unitaire dont tous les zéros ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice n° 3 (* I)**

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice n° 4 (* I)**

Résoudre sur l'intervalle I proposé :

1) $xy' - 2y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **2)** $xy' - y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **3)** $xy' + y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **4)** $xy' - 2y = x^3$ $(I =]0, +\infty[)$
5) $x^2y' + 2xy = 1$ $(I = \mathbb{R})$ **6)** $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ $(I =]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[,\ ]-\infty, 1[,\ ]0, +\infty[,\ \mathbb{R})$
7) $|x|y' + (x-1)y = x^3$ $(I = \mathbb{R})$.

Exercice n° 5 (* I)**

Déterminer le rayon de convergence puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$.

Exercice n° 6 (**)

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{array}\right.$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **3)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + z \end{array}\right.$ **5)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = -x \\ z' = x + y + z \end{array}\right.$ (trouver la solution telle que $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$).

Exercice n° 7 (**)

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (voir définition dans le n° 2, planche 13). Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8 (**)

Résoudre les systèmes

1) $\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}y + 2t \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}y + t^2 \end{array}\right.$ sur $]0, +\infty[$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} (t^2+1)x' = tx - y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x + ty + 3t \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - y \\ \operatorname{sh}(2t)y' = -x + \operatorname{ch}(2t)y \end{array}\right.$ sur $]0, +\infty[$ sachant qu'il existe une solution vérifiant $xy = 1$.

Exercice n° 9 (* I)**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.

2) $(x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

3) $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

4) $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$ sur $]-1, +\infty[$.

5) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice n° 10 (**)

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice n° 11 (***)

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\forall x > 0$, $f'(x) = f\left(\dfrac{3}{16x}\right)$.

Exercice n° 12 (* I)**

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\ dt$.

Exercice n° 13 (* I)**

Montrer que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\ dt$.