Suites et séries matricielles

Plan du chapitre

I - Etude de quelques normes sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour être capable d'étudier la convergence et la limite éventuelle d'une suite de matrices (ou d'endomorphismes) ou d'une série de matrices (ou d'endomorphismes), nous avons besoin d'une norme. Dans la pratique, de nombreuses normes sont utilisées.

Commençons par rappeler le fait que, puisque $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, les normes sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont deux à deux équivalentes. De même, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, les normes sur $\mathscr{L}(E,F)$ sont deux à deux équivalentes.

Les trois premiers exemples que nous allons rappeler sont $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$:

- $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} |a_{i,j}|$.
- $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} |a_{i,j}|^2}$ (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on peut enlever $|\ |$).
  Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^tAA)}$.
- $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_\infty = \mathrm{Max}\{|a_{i,j}|,\ (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\}$.

On suppose de plus que $n = p$. Etudions le comportement de ces trois normes avec le produit matriciel.

• Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Comparons $\|AB\|_\infty$ et $\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AB est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

On ne peut pas améliorer cette inégalité car si $A = B = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $AB = A^2 = nA$ et donc $\|AB\|_\infty = n$. D'autre part, $n\|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\times 1\times 1 = n$.

• Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Comparons $\|AB\|_1$ et $\|A\|_1\|B\|_1$.

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{l,j}| = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{l,j}| = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} |a_{i,k}|\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} |b_{l,j}|\right)\\
&= \|A\|_1\|B\|_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1\|B\|_1.$$

• Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Comparons $\|AB\|_2$ et $\|A\|_2\|B\|_2$.

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2 &= \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{l,j}|^2\right)} \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}|a_{i,k}|^2|b_{l,j}|^2} = \sqrt{\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}|b_{l,j}|^2\right)} \\
&= \|A\|_2\|B\|_2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|_2.$$

Ainsi, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ vérifient une propriété que ne vérifie pas $\|\|_\infty$:

$$\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Cette propriété se révèlera être très intéressante pour étudier la convergence de « séries entières de matrices » (ou d'endomorphismes) car on aura $N\left(A^k\right) \leqslant N(A)^k$. Ceci nous invite à poser la définition suivante :

DÉFINITION 1. Soit $(\mathscr{A},+,.,\times)$ une algèbre. Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{A}$.

$\|\ \|$ est appelée **norme sous-multiplicative** (ou aussi **norme d'algèbre**) si et seulement si, pour tout $(x,y)\in\mathscr{A}^2$, $\|x\times y\| \leqslant \|x\|\times\|y\|$.

Commentaire. Si $n\geqslant 2$, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative car $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\setminus\{0\})^2\right\} = \text{Max}\left\{\dfrac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\setminus\{0\})^2\right\} = n > 1$.

Théorème 1.

1) Il existe au moins une norme sous-multiplicative sur l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il existe au moins une norme sous-multiplicative sur l'algèbre $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$.

Démonstration. $\|\ \|_1$ convient.

Exercice 1. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $k>0$ tel que kN soit une norme sous-multiplicative.

Solution 1. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k>0$, il est immédiat que kN est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

N et $\|\ \|_1$ sont équivalentes. Donc, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \|_1$. Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B),$$

puis

$$\frac{\beta}{\alpha^2}N(AB) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)\frac{\beta}{\alpha^2}N(B).$$

Le réel $k = \dfrac{\beta}{\alpha^2} > 0$ convient.

Il existe un procédé permettant de construire une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à partir d'une norme donnée sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. C'est ce qu'étudie l'exercice suivant :

Exercice 2. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\|A\| = \text{Sup}\left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}.$$

1) Justifier, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

2) a) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \text{Sup}\{N(AX),\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.
b) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \text{Max}\{N(AX),\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.

3) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4) a) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leqslant \|A\|N(X)$.
b) En déduire que, pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Solution 2.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $X \mapsto AX$ est continue sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ car linéaire. On sait alors qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leqslant CN(X)$. Par suite, $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par C) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$ existe dans $\mathbb{R}$ ou encore $\|A\|$ existe.

2) a) Posons $\mathscr{A} = \left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$ et $\mathscr{B} = \{N(AX),\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.

On a $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Inversement, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $\frac{N(AX)}{N(X)} = N\left(A \times \frac{1}{N(X)}X\right) \in \mathscr{B}$ et donc $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. Par suite, $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ et en particulier, $\text{Sup}(\mathscr{A}) = \text{Sup}(\mathscr{B})$.

b) Posons $S = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})/\ N(X) = 1\}$. S est la sphère unité de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N)$. On sait que S est fermée et bornée. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, S est un compact de $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N)$ (car encore une fois, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension finie).

Puisque la fonction $X \mapsto N(AX)$ est continue sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par continuité de N entre autre) à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $X \mapsto N(AX)$ admet un maximum sur le compact S. Donc, $\|A\| = \text{Max}\{N(AX),\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.

3) • Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| \in \mathbb{R}^+$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\|A\| = 0$. Alors, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leqslant \|A\| = 0$ puis $N(AX) = 0$ puis $AX = 0$ ce qui reste vrai pour $X = 0$. Donc, $A = 0$.

• Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda|\frac{N(AX)}{N(X)} \leqslant |\lambda|\|A\|.$$

Donc, $|\lambda|\|A\|$ est un majorant de $\left\{\frac{N(\lambda AX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $\|\lambda A\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|\lambda A\| \leqslant |\lambda|\|A\|$.
Inversement, si $\lambda = 0$, on a $|\lambda|\|A\| = 0 = \|\lambda A\|$ et si $\lambda \neq 0$,

$$\|A\| = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda A\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\|,$$

et donc $|\lambda|\|A\| \leqslant \|\lambda A\|$ puis $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.

• Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{N((A+B)X)}{N(X)} \leqslant \frac{N(AX)}{N(X)} + \frac{N(BX)}{N(X)} \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

Donc, $\|A\| + \|B\|$ est un majorant de $\left\{\frac{N((A+B)X)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $\|A + B\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

On a montré que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4) a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Puisqu'une borne supérieure est un majorant, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{N(AX)}{N(X)} \leqslant \|A\|$ ou encore $N(AX) \leqslant \|A\|N(X)$, cette dernière inégalité restant vraie quand $X = 0$.

b) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{N(ABX)}{N(X)} \leqslant \frac{\|A\|N(BX)}{N(X)} \leqslant \frac{\|A\|\|B\|N(X)}{N(X)} = \|A\|\|B\|,$$

et donc, $\|AB\| = \text{Sup}\left\{\dfrac{N(ABX)}{N(X)},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\} \leqslant \|A\|\|B\|$.

II - Suites de matrices ou d'endomorphismes

Dans cette section, on énonce (très brièvement) dans le cadre particulier des matrices (ou des endomorphismes d'un espace de dimension finie), les résultats généraux sur les suites énoncés dans le chapitre « topologie ». Il est clair que tout résultat sur les matrices trouve son analogue dans les résultats sur les endomorphismes d'un espace de dimension finie. Dans ce qui suit, nous énoncerons explicitement les définitions ou théorèmes concernant les deux situations mais s'il y a lieu de faire une démonstration, nous ne le ferons que pour les matrices.

Définition 2.

1) Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite numérique $(\|A_p - A\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (où $\| \ \|$ est une norme donnée sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$). On écrit dans ce cas $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$.

2) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie puis $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{L}(E, F))^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_p - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (où $\| \ \|$ est une norme donnée sur $\mathscr{L}(E, F)$). On écrit dans ce cas $f = \lim\limits_{p\to+\infty} f_p$.

Commentaire. On rappelle que les normes sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (où $\mathscr{L}(E, F)$ si $\dim(E) < +\infty$) sont deux à deux équivalentes et donc que la notion de convergence et de limite ne dépend pas du choix d'une norme. On peut donc toujours choisir une norme adaptée à la situation. ❑

On sait qu'une suite d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si les « suites coordonnées dans une base » convergent. Pour une suite de matrices, cela donne :

Théorème 2.

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{N})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $A_p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$. Posons de même $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la suite $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$. En cas de convergence, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = \left(\lim\limits_{p\to+\infty} a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$

Exemple. $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{\ln n}{n} & n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. ❑

Exercice 3. Soit a un réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

Solution 3.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\theta_n = \text{Arcsin}\left(\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors, (puisque $\cos(\theta_n) \geqslant 0$),

$$\cos(\theta_n) = \sqrt{1-\sin^2(\theta_n)} = \sqrt{1-\dfrac{\dfrac{a^2}{n^2}}{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & -\dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \\ \dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

puis

$$A_n^n = \left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

- $\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{n}{2}o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{o(1)}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$.
- $n\theta_n = n\,\text{Arcsin}\left(\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\text{Arcsin}\left(\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} a+o(1)$. Par suite,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ et finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Sinon, rappelons pour finir :

Théorème 3.

1) Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Si la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{L}(E))^{\mathbb{N}}$. Si la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III - Séries de matrices ou d'endomorphismes

1) Séries d'un espace vectoriel normé

Définition 3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ (S_n est la somme partielle de rang n).

On dit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

En cas de convergence, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. Sinon, la série est dite divergente.

Commentaire. La notion de convergence d'une série est associée à une norme. Une série peut converger pour une norme et diverger pour une autre mais si N et N' sont deux normes équivalentes, une série converge pour N si et seulement si elle converge pour N'. Si E est de dimension finie, ce qui est le cas de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut choisir la norme car les normes sont deux à deux équivalentes. ❏

Quand E est de dimension finie, comme pour les suites, une série converge si et seulement si toutes les « séries coordonnées » convergent :

Théorème 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base donnée de E.

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $u_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_p^{(k)} e_k$.

La série de terme général u_p, $p \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, la série de terme général $u_p^{(k)}$, $p \in \mathbb{N}$, converge. De plus, en cas de convergence,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^{(k)} \right) e_k.$$

Pour une série de matrices, cela donne :

Théorème 5.
Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{N})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $A_p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$. Posons de même $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

La série de terme général A_p, $p \in \mathbb{N}$, converge vers A si et seulement si pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la série de terme général $a_{i,j}^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, converge vers $a_{i,j}$. En cas de convergence, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} A_p = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(p)} \right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

On définit maintenant la notion de convergence absolue :

Définition 4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

On dit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument si et seulement si la série numérique de terme général $N(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Commentaire. Quand la série de terme général $N(u_n)$ converge, on dit que la série de terme général u_n converge absolument et non pas que la série de terme général u_n converge normalement. Pour une série de fonctions, la convergence normale est la convergence absolue dans l'espace de ces fonctions muni de la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$. ❏

Théorème 6. Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. N est équivalente à $\|\ \|_\infty$ (norme infinie associée à la base $\mathscr{B}$) et il suffit donc de faire la démonstration dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_\infty)$.

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $u_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_p^{(k)} e_k$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\left|u_p^{(k)}\right| \leqslant \|u_p\|_\infty$. Puisque la série numérique de terme général $\|u_p\|_\infty$, $p \in \mathbb{N}$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $\left|u_p^{(k)}\right|$, $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la série numérique de terme général $u_p^{(k)}$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente. On sait alors qu'il en est de même de la série de terme général u_p, $p \in \mathbb{N}$.

Ainsi, toute série matricielle (ou toute série d'endomorphismes d'un espace de dimension finie) absolument convergente est convergente.

Sinon, signalons pour finir :

Théorème 7. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Si la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors u_n tend vers 0.

Démonstration. $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} S - S = 0$.

---

2) *Un exemple de calcul de la somme d'une série matricielle*

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$. On veut calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ après en avoir justifié l'existence.

Première méthode. (utilisation d'une réduction)

• $\chi_A = X^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{7}{6}\right) X + \left(\frac{4}{3}\left(-\frac{7}{6}\right) - \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$.
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

• $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}(A) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) x - \frac{5}{6} y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Donc, $E_{\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{3}}(A) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) x - \frac{5}{6} y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$. Donc, $E_{-\frac{1}{3}}(A) = \text{Vect}\,(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Donc, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, la série de terme général D^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D^n = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \text{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \text{diag}\left(2, \frac{3}{4}\right).$$

• L'application $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Donc, l'application f est continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(PDP^{-1}\right)^n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right)P^{-1} = \lim_{N\to+\infty} f\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right) \\
&= f\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} D^n\right) \text{ (par continuité de } f\text{)} \\
&= P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. (utilisation d'un polynôme annulateur)

On rappelle que $\chi_A = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X + b_n$ $(*)$ où Q_n est un polynôme et a_n et b_n sont deux réels. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = Q(A)\chi_A(A) + a_nA + b_nI_2 = a_nA + b_nI_2.$$

Calculons a_n et b_n. En évaluant en $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{3}$ les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a_n}{2} + b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ -\dfrac{a_n}{3} + b_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\end{array}\right.$ et donc, d'après les formules de CRAMER, $a_n = \dfrac{6}{5}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ et $b_n = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} A^n &= \sum_{n=0}^{N}(a_nA + b_nI_2) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)A + \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)I_2 \\ &= \frac{6}{5}\left[\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)A + \left(\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)I_2\right]\end{aligned}$$

De nouveau, la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} A^n &= \frac{6}{5}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)A + \left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)I_2\right] = \frac{3}{2}A + \frac{5}{4}I_2 \\ &= \frac{3}{2}\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6}\end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Remarque. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(I_2 - A)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} A^n\right) = I_2 - A^{N+1}$. Puisque la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, en particulier $A^{n+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$. Quand N tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers I_2. D'autre part, par continuité sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de l'endomorphisme $f\ :\ M \mapsto (I - A_2)\,M$, le membre de gauche tend vers $(I_2 - A)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right)$. Donc,

$$(I_2 - A)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right) = I_2.$$

Ainsi, la matrice $I_2 - A$ est inversible et

$$(I_2 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

IV - Exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme

1) Définition

Théorème 8.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La série de terme général $\dfrac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. La série de terme général $\dfrac{1}{p!}f^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

Démonstration. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Pour tout entier naturel p,

$$\left\|\frac{1}{p!}A^p\right\| = \frac{\|A^p\|}{p!} \leqslant \frac{\|A\|^p}{p!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{\|A\|^p}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$, est convergente (de somme $e^{\|A\|}$) et donc la série numérique de terme général $\left\|\dfrac{1}{p!}A^p\right\|$, $p \in \mathbb{N}$, est convergente ou encore, la série de matrices de terme général $\dfrac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

Définition 5.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'**exponentielle** de la matrice A est la matrice

$$\exp(A) = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}A^p.$$

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. L'**exponentielle** de l'endomorphisme f est l'endomorphisme

$$\exp(f) = \mathrm{Id}_E + \frac{1}{1!}f + \frac{1}{2!}f^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}f^p.$$

.

Exemple 1. Soit $n \geqslant 2$. Soit A la matrice élémentaire $E_{1,2}$. On sait que $A^2 = 0$ puis pour $p \geqslant 2$, $A^p = 0$. Donc,

$$\exp(A) = I_n + A = I_n + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Soit $n \geqslant 1$. Soit A la matrice élémentaire $E_{1,1}$. On sait que $A^2 = A$ puis pour $p \geqslant 1$, $A^p = A$. Donc,

$$\exp(A) = I_n + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\right) A = I_n + (e-1)E_{1,1} = \mathrm{diag}(e, 1, \ldots, 1).$$

Exemple 3. Soit s une symétrie d'un espace de dimension finie E. On sait que $s^2 = \mathrm{Id}_E$ puis pour $p \in \mathbb{N}$, $s^{2p} = \mathrm{Id}_E$ et $s^{2p+1} = s$. Donc (toutes les séries ci-dessous étant convergentes),

$$\exp(s) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) \mathrm{Id}_E + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right) s = \mathrm{ch}(1)\mathrm{Id}_E + \mathrm{sh}(1)s.$$

2) Propriétés

Théorème 9.

1) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$. Alors $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\exp(f + g) = \exp(f) \circ \exp(g)$.

Démonstration. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque les matrices A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit :

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}B^k\right)-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}(A+B)^k\right\| &= \left\|\sum_{0\leqslant i,j\leqslant p}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}A^iB^j\right\| \\
&= \left\|\sum_{0\leqslant i,j\leqslant p}\frac{1}{i!j!}A^iB^j-\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant p\\ i+j\leqslant p}}\frac{1}{i!j!}A^iB^j\right\| = \left\|\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant p\\ i+j>p}}\frac{1}{i!j!}A^iB^j\right\| \\
&\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant p\\ i+j>p}}\frac{1}{i!j!}\|A\|^i\,\|B\|^j \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\|B\|^k\right)-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}(\|A\|+\|B\|)^k.
\end{aligned}$$

$\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\|B\|^k\right)-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}(\|A\|+\|B\|)^k$ tend vers $e^{\|A\|+\|B\|}-e^{\|A\|}e^{\|B\|}=0$ quand p tend vers $+\infty$. Donc, $\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}B^k\right)-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}(A+B)^k$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Quand p tend vers $+\infty$, $\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}(A+B)^k$ tend vers $\exp(A+B)$. D'autre part, l'application $(M,N)\mapsto MN$ est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. Donc, $\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}B^k\right)$ tend vers $\exp(A)\times\exp(B)$ quand p tend vers $+\infty$.

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp(A+B)=\exp(A)\times\exp(B)$.

Théorème 10.

1) a) $\exp(0_n)=I_n$.
b) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A)\in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(A))^{-1}=\exp(-A)$.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie.
a) $\exp(0)=Id_E$.
b) Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Alors $\exp(f)\in GL(E)$ et $(\exp(f))^{-1}=\exp(-f)$.

Démonstration. Les matrices A et $-A$ commutent. Donc,

$$\exp(A)\times\exp(-A)=\exp(A+(-A))=\exp(0)=I_n+0+0+\ldots=I_n.$$

On en déduit que $\exp(A)\in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(A))^{-1}=\exp(-A)$.

Théorème 11. $\forall(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$, $\exp\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)=\mathrm{diag}\,\left(e^{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Démonstration. Soit $p\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\mathrm{diag}\,(\lambda_i^k)_{1\leqslant i\leqslant n}=\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\lambda_i^k$ tend vers e^{λ_i} quand p tend vers $+\infty$ et donc $\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^k$ tend vers $\mathrm{diag}\,\left(e^{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ quand p tend vers $+\infty$.

Commentaire. En particulier, $\exp(\lambda I_n)=e^{\lambda}I_n$ ou $\exp(\lambda Id_E)=e^{\lambda}Id_E$.

Théorème 12.

1) $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P\in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}\exp(A)P=\exp\left(P^{-1}AP\right)$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $\forall f\in\mathscr{L}(E)$, $\forall g\in GL(E)$, $g^{-1}\circ\exp(f)\circ g=\exp\left(g^{-1}\circ f\circ g\right)$.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)P.$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k$ tend vers $\exp\left(P^{-1}AP\right)$ quand p tend vers $+\infty$. D'autre part, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, $P^{-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)P$ tend vers $P^{-1}\exp(A)P$ quand p tend vers $+\infty$.

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.

Théorème 13. Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire. Alors $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \times & \dots & \times \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Démonstration. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}T^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \times & \dots & \times \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Théorème 14.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Sp}(f) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\mathrm{Sp}(\exp(f)) = \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(f)) = e^{\mathrm{Tr}(f)}.$$

Démonstration. On sait que A est triangulable dans $\mathbb{C}$. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. On sait que $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

D'après les théorèmes précédents, $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$ puis $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \mathrm{Sp}(\exp(T)) = \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(A)) = e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Commentaire. On retrouve ainsi le fait que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$.

3) Quelques exemples de calculs d'exponentielles

On verra dans le chapitre « systèmes différentiels linéaires et équations différentielles linéaires » que les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants peuvent être résolus à partir du calcul de l'exponentielle d'une matrice. Quand A est une matrice donnée, les solutions d'un certain problème s'exprimeront à l'aide de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$. Dans les exemples qui suivent, plutôt que de calculer $\exp(A)$, nous calculerons $\exp(tA)$ pour t réel (pour préparer le terrain).

Exemple 1 (utilisation d'un polynôme annulateur). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs fournit

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & X & 0 \\ 0 & 0 & X+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(X^2 - \frac{1}{4}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right) = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit que $\text{Sp}(A) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On note que $\text{rg}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = 2$ et donc que $\dim\left(\text{Ker}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right)\right) = 1 < 2$.

La matrice A 'est pas diagonalisable puis $\mu_A = \chi_A = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_nX^2 + b_nX + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$ puis en dérivant et en réevaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}b_n + c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{(I)} \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{(II)} \\ -a_n + b_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \text{(III)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} b_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{(II)} - \text{(I)} \\ a_n = (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{(III)} \\ c_n = -\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \end{array}\right..$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit $\chi_A(A) = 0$ et donc $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$. Par suite, pour t réel donné (puisque toutes les séries ci-dessous convergent)

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\left(a_nA^2 + b_nA + c_nI_3\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\frac{t^n}{n!}\right)I_3 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\frac{t^n}{n!}\right)A + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{t^n}{n!}\right)A^2. \end{aligned}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{t^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(-t/2)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t/2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t/2)^n}{(n-1)!} - e^{-t/2} + e^{t/2} = -te^{-t/2} - e^{-t/2} + e^{t/2}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\frac{t^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t/2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^n}{n!} = -e^{-t/2} + e^{t/2}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\frac{t^n}{n!} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(-t/2)^n}{n!} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t/2)^n}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^n}{n!} = \frac{t}{4}e^{-t/2} + \frac{3}{4}e^{-t/2} + \frac{1}{4}e^{t/2}$.

On en déduit que $\exp(tA) = \frac{1}{4}\left(\left((t+3)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)I_3 + \left(-e^{-t/2} + e^{t/2}\right)A + \left(-(t+1)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)A^2\right.$ avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\exp(tA) = \frac{1}{4}\left((t+3)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(-(t+1)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & -2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & -4(t-1)e^{-t/2} - 4e^{t/2} \\ -2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & 2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & 4(t+1)e^{-t/2} - 4e^{t/2} \\ 0 & 0 & 4e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 (utilisation d'une réduction de la matrice). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -2 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-3)\left(X^2-1\right) + (-2X-2) + (2X+2)$$
$$= (X+1)(X-1)(X-3).$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = (-1, 1, 3)$. Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$. Donc, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$. Donc, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 4y \end{cases}$. Donc, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc, $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 3)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1}. Notons (i, j, k) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} e_1 = j - k \\ e_2 = i - k \\ e_3 = 4i + j - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = e_1 + k \\ i = e_2 + k \\ e_3 = 4\,(e_2 + k) + (e_1 + k) - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4}\,(-e_1 - 4e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{4}\,(3e_1 - 4e_2 + e_3) \\ i = \frac{1}{4}\,(-e_1 + e_3) \end{cases}.$$

Donc, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons alors $\exp(tA)$ pour t réel donné. Puisque $tA = P \times tD \times P^{-1}$, on sait que (par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ entre autre)

$$\exp(tA) = P\times\exp(tD)\times P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1\\ 0 & -4 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & e^{t} & 4e^{3t}\\ e^{-t} & 0 & e^{3t}\\ -e^{-t} & -e^{t} & -e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1\\ 0 & -4 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & -4e^{t}+4e^{3t} & -4e^{t}+4e^{3t}\\ -e^{-t}+e^{3t} & 3e^{-t}+e^{3t} & -e^{-t}+e^{3t}\\ e^{-t}-e^{3t} & -3e^{-t}+4e^{t}-e^{3t} & e^{-t}+4e^{t}-e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Exemple 3 (cas où A n'a qu'une valeur propre). Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ -10 & -4 & -2\end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1\\ -6 & X-4 & -2\\ 10 & 4 & X+2\end{vmatrix} = (X-4)\left(X^2-2X\right) + 6(-X+2) + 10(X-2)$$
$$= (X-2)(X(X-4)-6+10) = (X-2)\left(X^2-4X+4\right)$$
$$= (X-2)^3.$$

Calculons alors $\exp(tA)$ pour t réel donné. On va profiter du fait que la matrice $A-2I_3$ est nilpotente (on est dans le cas où A n'a qu'une valeur propre). D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A-2I_3)^3 = 0$ et donc

$$\exp(tA) = \exp\left(t\left(A-2I_3\right)+2tI_3\right)$$
$$= \exp\left(t\left(A-2I_3\right)\right)\times\exp\left(2tI_3\right)\ \text{(car } t\left(A-2I_3\right) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)}$$
$$= e^{2t}\left(I_3 + t\left(A-2I_3\right) + \frac{t^2}{2}\left(A-2I_3\right)^2\right)\ \text{(car pour } n\geqslant 3,\ \left(A-2I_3\right)^n = 0\text{)}$$
$$= e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 2\\ -10 & -4 & -4\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ -4 & -2 & -2\end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} (2t+1)\,e^{2t} & te^{2t} & te^{2t}\\ \left(2t^2+6t\right)e^{2t} & \left(t^2+2t+1\right)e^{2t} & \left(t^2+2t\right)e^{2t}\\ \left(-2t^2-10t\right)e^{2t} & \left(-t^2-4t\right)e^{2t} & \left(-t^2-4t+1\right)e^{2t}\end{pmatrix}$$