Séries numériques

Dans ce chapitre, on apporte quelques compléments aux différents résultats énoncés en Maths Sup concernant les séries à termes réels ou complexes. Le programme officiel de Maths Spé prévoit d'effectuer l'étude des séries dans un cadre plus général, à savoir l'étude des séries à termes éléments d'un espace vectoriel normé. Cette étude générale sera effectuée dans le chapitre « Topologie des espaces vectoriels normés ».

1) Les séries alternées

Rappelons un calcul fait en sup, celui de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt \text{ (car } \forall t \in [0,1],\ -t \neq 1)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt\\ &= \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt.\end{aligned}$$

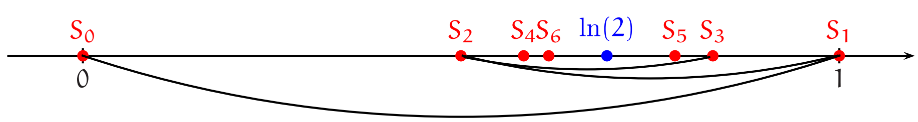
Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|(-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+0}\,dt = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. Mais alors, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, $k \geqslant 1$, converge et a pour somme $\ln(2)$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots = \ln(2).}$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geqslant 1$, est donc convergente. Maintenant, cette série n'est pas absolument convergente car la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge. La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geqslant 1$, est un exemple de série semi-convergente. Plaçons les valeurs des premières sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (et par convention $S_0 = 0$) sur un axe pour comprendre que cette convergence était prévisible.



Quand on va de S_0 à S_1, on ajoute 1 puis quand on va de S_1 à S_2 on retranche moins que ce qu'on vient d'ajouter à savoir $\dfrac{1}{2}$ puis quand on va de S_2 à S_3, on ajoute moins que ce qu'on vient de retrancher à savoir $\dfrac{1}{3}$ ... Tout ceci a pour conséquence

$$S_0 \leqslant S_2 \leqslant S_4 \leqslant S_6 \leqslant \ldots \leqslant S_5 \leqslant S_3 \leqslant S_1.$$

D'autre part, pour tout entier n, $|S_n - S_{n+1}| = \dfrac{1}{n+1}$. Comme cette distance tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une limite commune. Cette situation rentre dans un cadre général :

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Définition 1. (séries alternées)

On appelle **série alternée** toute série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = -(-1)^n v_n$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle
- décroissante,
- convergente et de limite nulle.

Commentaire. Notons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement positive en tant que suite réelle décroissante de limite nulle. On a donc les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = |u_n|,\ \text{et aussi } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-1)^n |u_n|.$$

Théorème 1. (critère spécial aux séries alternées)

Toute série alternée converge.

Démonstration. On montre le résultat dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle, positive, décroissante, de limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0$;
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+1} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geqslant 0$.

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ et donc $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes, de même limite. Mais alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées. On peut noter que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente et donc la série de terme général u_n est une série semi-convergente.

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. La série de terme général u_n est absolument et donc convergente. La série de terme général u_n est une série alternée mais il serait très maladroit d'utiliser cette constatation ici pour prouver la convergence de cette série.

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$.

1) Vérifier que u_n est bien défini pour tout entier naturel n.

2) a) Préciser le signe de u_n en fonction de n. Que vaut $|u_n|$?
b) Représenter graphiquement les premiers de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Etudier le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

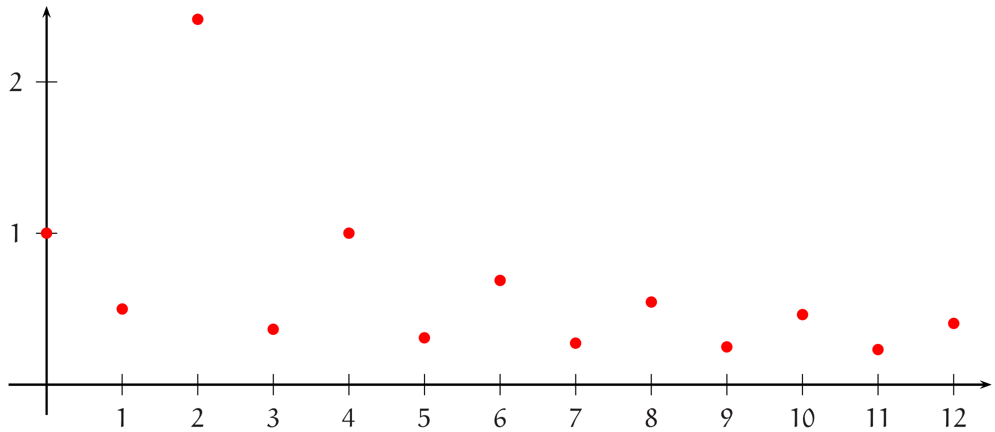
Solution 1.

1) $\sqrt{0} + (-1)^{-1} = -1 \neq 0$, $\sqrt{1} + (-1)^0 = 2 \neq 0$. D'autre part, pour $n \geqslant 2$, $\sqrt{n} + (-1)^{n-1} \geqslant \sqrt{2} - 1 > 0$. Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} + (-1)^{n-1} \neq 0$ et donc que u_n est bien défini pour tout entier naturel n.

2) a) $u_0 = -1 < 0$. D'autre part, d'après ce qui précède, pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} + (-1)^{n-1} > 0$. Donc, pour $n \geqslant 1$, le signe de u_n est le signe de $(-1)^n$ ou encore, pour $n \geqslant 1$, u_n est strictement positif quand n est pair et strictement négatif quand n est impair. En particulier, $\forall n \geqslant 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

b) Représentation graphique des premiers termes de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.



c) Il semblerait que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas monotone, ni même monotone à partir d'un certain rang. Tout d'abord, $|u_0| < |u_1|$. En suite, pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(|u_{n+1}| - |u_n|) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right) = \operatorname{sgn}\left(\left(\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right) - \left(\sqrt{n+1}+(-1)^n\right)\right)\\ &= \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+2(-1)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

• Si n est pair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p+1}| - |u_{2p}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}-2\right)$ avec

$$-\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}-2 = -\frac{1}{\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}} - 2 < 0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p+1}| - |u_{2p}| < 0$.

• Si n est impair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p-1$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p}| - |u_{2p-1}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}+2\right)$ avec

$$-\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}+2 = -\frac{1}{\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}} + 2 \geqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} \geqslant 2-1 = 1 > 0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p}| - |u_{2p-1}| > 0$.

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, ni même monotone à partir d'un certain rang.

3) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = \dfrac{1}{n}$ et $t_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

• La série de terme général v_n converge d'après le critère spécial aux séries alternées.
• La série de terme général w_n diverge (série harmonique).
• La série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$). Donc, la série de terme général t_n converge absolument et en particulier converge.

Supposons par l'absurde que la série de terme général u_n converge. Alors, la série de terme général $w_n = u_n - v_n - t_n$ converge ce qui n'est pas. Donc, la série de terme général u_n diverge.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Commentaire. Dans cet exercice, on a à faire face à de nombreux pièges.

• La question 2)b) montre que la série de terme général u_n **n'est pas une série alternée**. La seule présence du facteur $(-1)^n$ ne suffit pas à faire d'une série une série alternée. Il faut encore que la valeur absolue du terme général tende vers 0 **en décroissant**.

• Pour étudier, la convergence de la série de terme général u_n, on peut être tenté de commencer par

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Cet équivalent est tout à fait exact car $\dfrac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Mais cet équivalent ne sert à rien car le « théorème » : $\left(\left(u_n \sim v_n \text{ et } \sum u_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \sum v_n \text{ converge}\right)$ **est un théorème faux** (ou plutôt, n'est pas un théorème). Dans l'intitulé précédent, il manque une information capitale : la suite (u_n) est une suite réelle positive ou plus généralement une suite réelle de signe constant à partir d'un certain rang.

L'exercice précédent fournit un premier exemple de suites (u_n) et (v_n), équivalentes en $+\infty$ mais telles que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle alternée en signe dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors,

• $\text{sgn}(S) = \text{sgn}(u_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(S_n) = \text{sgn}(u_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1})$.
• $|S| \leqslant |u_0|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant |u_0|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Commentaire. On a l'habitude de dire que S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et en valeur absolue majorés par la valeur absolue de leur premier terme.

Démonstration. • Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$ (de sorte que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \leqslant 0, \ldots$)
On rappelle que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers S. Par suite,

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \ldots \leqslant S \leqslant \ldots \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$

En particulier, $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ et aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_1 \leqslant S_n \leqslant S_0$. D'autre part, $S_0 = u_0$ et $S_1 = u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$. Donc,

$$0 \leqslant S \leqslant u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant u_0.$$

Ceci montre que S et S_n sont du signe de u_0 et en valeur absolue majorés par la valeur absolue de u_0.

• Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -(-1)^n |u_n|$ (de sorte que $u_0 \leqslant 0$, $u_1 \geqslant 0, \ldots$). Alors, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est du type précédent et donc $0 \leqslant -S \leqslant -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant -S_n \leqslant -u_0$. Ceci montre S et S_n sont négatifs et donc du signe de u_0 et que leur valeur absolue est majoré par la valeur absolue de u_0.

En appliquant le résultat établi pour S à R_n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Exemple. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est du signe de $\dfrac{(-1)^{1-1}}{1} = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \geqslant 0$.

D'autre part, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{1-1}}{1}\right| = 1$. Ce résultat est en adéquation avec la calcul du début du paragraphe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

De même, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est du signe de $\dfrac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}} = 1$ et donc positif et d'autre part, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{1-1}}{1}\right| = 1$. Ainsi,

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

On obtient dans ce cas un encadrement de la somme sans connaître la valeur exacte de cette somme.

Exercice 2.

Calculer une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ à 10^{-2} près.

Solution 2.

$\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n^2+1}$ tend vers 0 en décroissant. Donc, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. Posons $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

On sait que pour tout entier naturel p, $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$ avec

$$|S_{2p+1} - S_{2p}| = \left|\frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2+1}\right| = \frac{1}{(2p+1)^2+1}.$$

Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2}$, alors une valeur approchée $\widetilde{S_{2p}}$ de S_{2p} à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près est une valeur approchée de S à 10^{-2} près car

$$\left|\widetilde{S_{2p}} - S\right| \leqslant \left|\widetilde{S_{2p}} - S_{2p}\right| + |S_{2p} - S| \leqslant \frac{10^{-2}}{2} + |S_{2p} - S_{2p+1}| \leqslant \frac{10^{-2}}{2} + \frac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant 10^{-2}.$$

Or, $\dfrac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow (2p+1)^2+1 \geqslant 200 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\sqrt{199}-1}{2} = 6,5\ldots \Leftrightarrow p \geqslant 7$.

Une valeur approchée de S_7 à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près est une valeur approchée de S à 10^{-2} près. La calculatrice fournit $S_7 = 0,627\ldots$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = 0,63 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

---

2) La règle de d'Alembert

Théorème 3. (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet pour limite un certain ℓ élément de $[0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Alors

- Si $0 \leqslant \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument ;
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien en conclure.

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

1er cas. Supposons que $\ell \in]1, +\infty]$. Il existe alors un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ ou encore $|u_{n+1}| \geqslant |u_n|$. Ainsi, la suite $(|u_n|)$ croît à partir du rang n_1 et en particulier,

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n| \geqslant |u_{n_1}| \text{ avec } |u_{n_1}| > 0.$$

Ceci montre que u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

2ème cas. Supposons que $\ell \in [0, 1[$. Il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1+\ell}{2}$. Pour $n \geqslant n_1+1$,

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}|u_n| &= \left|u_{n_1} \times \prod_{k=n_1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = |u_{n_1}| \prod_{k=n_1}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant |u_{n_1}| \prod_{k=n_1}^{n-1} \left(\frac{1+\ell}{2}\right) \\ &= |u_{n_1}| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_1} = \frac{|u_{n_1}|}{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n_1}} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Maintenant, $0 < \dfrac{1+\ell}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$ et donc $\dfrac{|u_{n_1}|}{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n_1}} \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente et on en déduit que la série de terme général u_n converge absolument.

Le cas $\ell = 1$ est analysé dans le commentaire 2 ci-dessous.

Commentaire 1. Dans la pratique, on utilise peu la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Elle ne s'utilise que dans le cas de suites au comportement à l'infini caricatural comme les suites géométriques et définies avec beaucoup de produits. La règle de d'Alembert est introduite en maths spé principalement pour l'étude des « séries entières », chapitre dans lequel elle sera bien davantage utilisée.

On peut par exemple être tenté d'utiliser la règle de d'Alembert pour $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$. La suite (u_n) ne s'annule pas et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n}$. Ainsi, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\dfrac{1}{2} \in [0, 1[$ et la règle de d'Alembert permet d'affirmer que la série de terme général $\dfrac{n+1}{2^n}$ converge absolument.

Mais tout ceci est très maladroit : $n^2 u_n \sim \dfrac{n^4}{2^n} = o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On voit donc tout de suite que la série de terme général $\dfrac{n+1}{2^n}$ converge.

Un exemple typique d'utilisation de la règle de d'Alembert est fournie par l'exercice suivant :

Exercice 3. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{3^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solution 3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}/3^{2(n+1)}}{\binom{2n}{n}/3^{2n}} = \frac{3^{2n}}{3^{2n+2}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{9(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{9(n+1)}.$$

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\dfrac{4}{9} \in [0, 1[$ et donc la série de terme général $\dfrac{\binom{2n}{n}}{3^{2n}}$ converge d'après la règle de d'Alembert.

Commentaire 2. (analyse du cas $\ell = 1$)

Si $u_n = n^{10}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{10} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et si $v_n = n^{-10}$, alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-10} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont respectivement divergentes et convergentes. Ceci montre déjà que dans le cas critique $\ell = 1$, on ne peut rien conclure de l'étude de $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et on doit essayer autre chose.

En fait, de manière générale, si $u_n = n^\alpha$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Cette constatation montre la médiocrité de la règle de d'Alembert. Son champ d'application est très réduit. La règle de d'Alembert ne s'utilise que pour des suites qui sont « dans l'idée » d'une suite géométrique de raison différente de 1 comme $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ ou (2^n). On redit ici que cette règle sera beaucoup plus utilisée dans un cadre particulier, celui des séries entières.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Commentaire 3. Pour pouvoir utiliser la règle de d'Alembert, il est essentiel que la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On ne cherchera donc pas à l'utiliser directement pour $u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ou $u_n = \dfrac{(1+(-1)^n)\dbinom{2n}{n}}{3^{2n}}$.

Exercice 4. (règle de Raabe-Duhamel)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$ (considérer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ où $v_n = n^\alpha u_n$.

Application 1. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{\dbinom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Application 2. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}$, a réel strictement positif donné.

Solution 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = n^\alpha u_n$ puis $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
w_n &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite $(\ln(v_n))$. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n)$ puis $K = e^\ell$.

Puisque $n^\alpha u_n = v_n = e^{\ln(v_n)}$, $n^\alpha u_n$ tend vers K quand n tend vers $+\infty$ ou encore $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ puisque K est un réel strictement positif et finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}.$$

Application 1. La suite (u_n) est strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$. La série de terme général u_n diverge.

Application 2. La suite (u_n) est strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+a}{n+1}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1-a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K>0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1-a}}$. Puisque $1-a<1$, la série de terme général u_n diverge.

---

3) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
Le **produit de Cauchy** des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **est la série** de terme général w_n où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème 4. (produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent **absolument**, alors le produit de Cauchy de ces deux séries converge et a pour somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. Plus explicitement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=\sum_{i=0}^{n} u_i$, $V_n=\sum_{i=0}^{n} v_i$ puis

$$W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} u_j v_{i-j}\right) = \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l\leqslant n}} u_k v_l.$$

Enfin, puisque les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument et donc convergent, on pose $U=\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ et $V=\sum_{i=0}^{+\infty} v_i$.

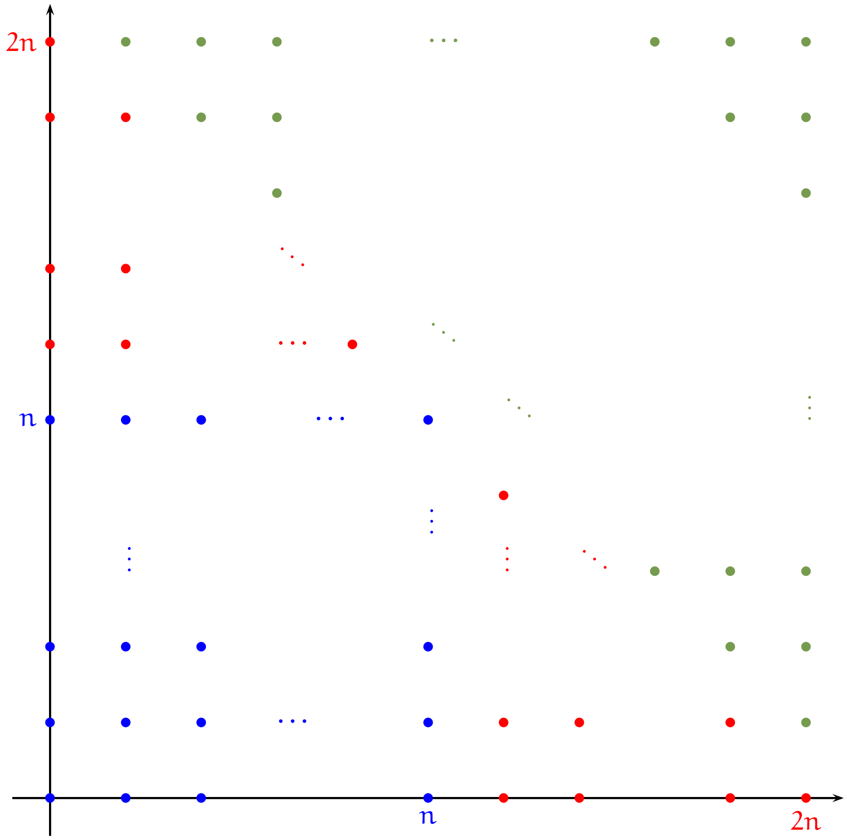
• On effectue d'abord la démonstration dans le cas particulier où les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes réels positifs auquel cas dire que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument équivaut à dire que ces séries convergent.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $U_n\times V_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} v_l\right) = \sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l$. Soient alors k et l deux entiers naturels.

$$(k,l)\in[\![0,n]\!]^2 \Rightarrow 0\leqslant k+l\leqslant 2n \Rightarrow (k,l)\in[\![0,2n]\!]^2,$$

et donc $[\![0,n]\!]^2 \subset \left\{(k,l)\in\mathbb{N}^2/\ k+l\leqslant 2n\right\} \subset [\![0,2n]\!]^2$ (voir graphique page suivante).

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.



Puisque tous les termes considérés sont positifs, on en déduit que

$$\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k,l\leqslant 2n} u_k v_l,$$

ou encore que

$$U_n \times V_n \leqslant W_{2n} \leqslant U_{2n} \times V_{2n} \quad (*).$$

Par hypothèse, la suite (U_n) converge vers U et la suite (V_n) converge vers V. Mais alors, les suites extraites (U_{2n}) et (V_{2n}) convergent vers U et V respectivement. Ainsi, les membres extrêmes de l'encadrement $(*)$ convergent tous les deux vers $U \times V$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (W_{2n}) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n} = U \times V$. Enfin, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$, la suite (W_n) est croissante et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n+2}$. Le théorème des gendarmes permet une nouvelle fois de conclure que (W_{2n+1}) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n+1} = U \times V$.

En résumé, les deux suites extraites (W_{2n}) et (W_{2n+1}) convergent et ont même limite, à savoir $U \times V$. On en déduit que la suite (W_n) converge et a pour limite $U \times V$. Le théorème est démontré dans le cas des séries à termes positifs.

• On passe maintenant au cas général. On suppose que les suites (u_n) et (v_n) sont complexes et que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$, $w'_n = \sum\limits_{k+l=n} u'_k v'_l$, $U'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u'_k$, $V'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v'_k$ et enfin, $W'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w'_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n V_n - W_n| = \left| \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n \\ k+l>n}} u_k v_l \right| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n \\ k+l>n}} |u_k|\,|v_l| = \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n \\ k+l>n}} u'_k v'_l = U'_n V'_n - W'_n.$$

D'après l'étude du cas des séries à termes réels positifs, $U'_n V'_n - W'_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $U_n V_n - W_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$W_n \underset{n\to+\infty}{=} U_n V_n + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} UV + o(1).$$

Ceci montre que la suite (W_n) converge et a pour limite UV.

Exemple. On sait depuis la maths sup que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right| = \dfrac{|z|^n}{n!}$. La série de terme général $\dfrac{|z|^n}{n!}$ converge (et a pour somme $e^{|z|}$) ou encore la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument et en particulier converge. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose alors

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On va vérifier que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{(z')^n}{n!}$. Le terme général du produit de Cauchy des séries de termes généraux u_n et v_n est, d'après la formule du binôme de Newton,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Puisque les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument, on en déduit que la série de terme général w_n converge et a pour somme $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \exp(z) \times \exp(z')$. Comme d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z'),$$

on a montré que $\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$.

Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est une série convergente.
L'exercice ci-dessous montre qu'on ne peut pas élargir l'hypothèse aux séries convergentes.
Le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Exercice 5. Analyser la convergence du produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même.

Solution 5. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

D'autre part, la série de terme général $\left|\dfrac{-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est divergente (série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$).

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est donc une série semi-convergente.

Pour $n \geqslant 0$, posons $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$ de sorte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Le terme général du produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même est $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

On a $v_0 = v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k-1}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k(n-k) = -k^2 + nk = -\left(k - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n^2}{4} \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ et donc

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2/4}} = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n} \geqslant 2 - \frac{2}{2} = 1.$$

Ceci montre que v_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général v_n diverge grossièrement. Ainsi, le produit de CAUCHY de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

---

4) Théorèmes de sommation des relations de comparaison

Théorème 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (resp. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$).

• Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \text{ (resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

• Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \text{ (resp. } \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Démonstration.

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et que la série de terme général v_n converge. On sait que la série de terme général u_n converge et donc les restes à l'ordre n $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_k \leqslant \varepsilon v_k$. Soit $n \geqslant n_0$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant n_1$, $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} v_k$. Soit $n \geqslant n_1$.

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k = \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et que la série de terme général v_n converge. On sait que la série de terme général u_n converge et donc les restes à l'ordre n $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_k \leqslant Mv_k$. Soit $n \geqslant n_0$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

On a montré que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R}^{+*}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $k \geqslant n_1$, $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{M}{2} v_k$. Soit $n \geqslant n_1$.

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2} \sum_{k=n_1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k$. Maintenant, $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ et donc $\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k \leqslant \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k = M \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

On a montré que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M \in]0, +\infty[/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Théorème 6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

• Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

• Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Commentaire. Dans la situation ci-dessus, on a l'habitude de dire que, en cas de convergence, les restes à l'ordre n sont des infiniment petits équivalents et que, en cas de divergence, les sommes partielles sont des infiniment grands équivalents.

Démonstration du théorème 6. On peut déduire immédiatement le théorème 6 du théorème 5 à partir de : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Nous ferons néanmoins une démonstration explicite et autonome car sa restitution peut être l'objet d'un problème d'écrit.

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que la série de terme général u_n converge. On sait que la série de terme général v_n converge et donc les restes à l'ordre n $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $|u_k - v_k| \leqslant \varepsilon u_k$. Soit $n \geqslant n_0$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant n_1$, $|u_k - v_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} u_k$. Soit $n \geqslant n_1$.

$$\begin{aligned}
|U_n - V_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n_1-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=n_1}^{n} (u_k - v_k)\right| \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - v_k| \\
&\leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} U_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $0\,|U_n - V_n| \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \dfrac{\varepsilon}{2} U_n$. Maintenant, U_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon} |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}|$ et donc $|U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} U_n$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|U_n - V_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} U_n + \frac{\varepsilon}{2} U_n = \varepsilon U_n.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - V_n| \leqslant \varepsilon U_n)$ et donc que

$$U_n - V_n \underset{n\to+\infty}{=} o(U_n) \text{ ou encore } U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n.$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = n \ln n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)\ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + nO\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + O(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.
\end{aligned}$$

La règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\ln(n!) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_1 = (n+1)\ln(n+1) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.\end{aligned}$$

Donc, $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$. Cette équivalence est le point de départ de la formule de Stirling.

Exercice 6. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis déterminer un équivalent de $\displaystyle\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution 6. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et d'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Puisque $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

On a montré que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ensuite, pour $n \geqslant 2$,

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}.$$

Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2(n-1)} \geqslant 0$ et d'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2(n-1)}$ converge.

Puisque $\dfrac{1}{n^2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)n(n-1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{(n+1)n}\right)$, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{(k+1)k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{(k+1)k}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{N(N+1)}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ ou encore

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

5) Comparaison séries-intégrales

Ce sujet sera traité dans le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque ».

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.