Planche n$^{\text{o}}$ 14. Topologie des espaces vectoriels normés. Corrigé

Exercice n$^{\text{o}}$ 1

Cas de la boule fermée. Soit $B = \{u \in E/\ \|u\| \leqslant 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in B^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ et donc B est convexe.

Cas de la boule ouverte. Soit $B = \{u \in E/\ \|u\| < 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \|x\| < 1$, on en déduit que $\lambda\|x\| < 1$. D'autre part, $(1-\lambda)\|y\| \leqslant 1$ (et même < 1) et donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < 1.$$

$$\boxed{\text{La boule unité fermée (resp. ouverte) de l'espace vectoriel normé } (E, \|\ \|) \text{ est un convexe de l'espace vectoriel } E.}$$

Exercice n$^{\text{o}}$ 2

1) Puisque $p > 0$ et $q > 0$, $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p}$ et donc $p > 1$. De même, $q > 1$. D'autre part, $q = \dfrac{p}{p-1}$.

a) 1ère solution. L'inégalité est immédiate quand $x = 0$ ou $y = 0$. Soient $x > 0$ et $y > 0$. La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. Donc,

$$\ln(xy) = \frac{1}{p}\ln\left(x^p\right) + \frac{1}{q}\ln\left(y^q\right) \leqslant \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$$

puis par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

2ème solution. L'inégalité est immédiate quand $y = 0$. Soit $y > 0$ fixé.
Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$. Puisque $p > 1$, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{p-1} - y$.
f admet donc un minimum en $x_0 = y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right) = \frac{y^{p(p-1)}}{p} + \frac{y^{p/(p-1)}}{q} - y^{1/(p-1)}y = y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Finalement, f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.}$$

b) Posons $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$.
Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.
On suppose dorénavant que $A > 0$ et $B > 0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \times \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB}\right) = \frac{1}{pA}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \frac{1}{qB}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = \frac{1}{pA} \times A + \frac{1}{qB} \times B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| \leqslant A^{1/p}B^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|$, on a montré que

$$\boxed{\forall \left((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Inégalité de Hölder).}}$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Remarque. Quand $p = q = 2$, on a bien $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

c) Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.

Sinon $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p > 0$ et après multiplication des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{-1+\frac{1}{p}}$, on obtient $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$

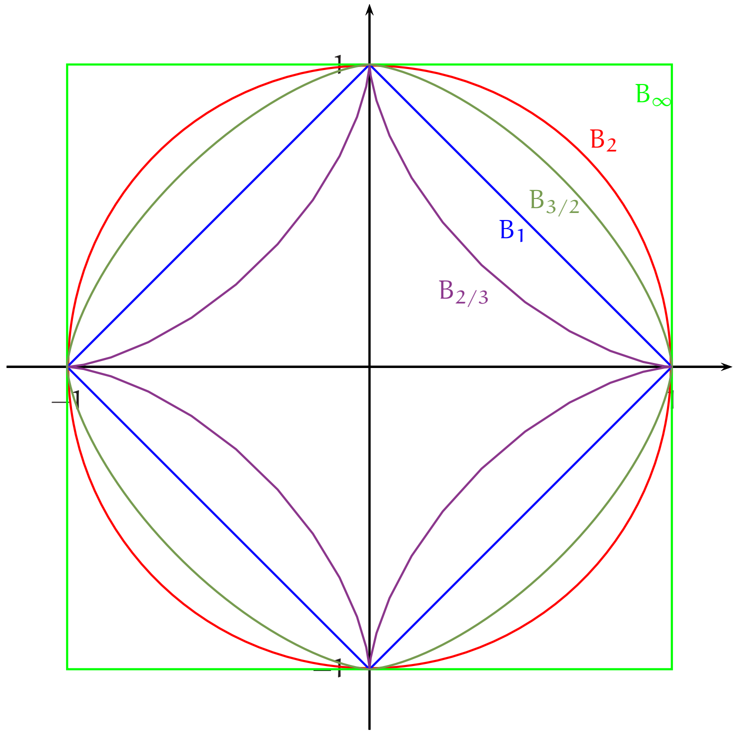
$$\boxed{\forall ((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{(Inégalité de Minkowski).}}$$

2) a) On sait déjà que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha > 1$.

(1) N_α est bien une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
(2) Soit $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$.
(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x) = \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x)$.
(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minkowski.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^n,\ N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.}$$

b) Quelques « boules unités » dans $\mathbb{R}^2$.



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E,\ N(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow N(-x) \leqslant 1.$$

c) Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leqslant N_\alpha(x) \leqslant n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

d) Soient $\alpha \in]0, 1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ N_\alpha(x) \leqslant 1\}$. Les vecteurs $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ sont des éléments de B. Le milieu du segment $[x, y]$ est $z = \dfrac{1}{2}(1, 1, 0, \dots, 0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice n° 1.

On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Exercice n° 3

• Il est connu que N est une norme sur E.

• Montrons que N' est une norme sur E.

(1) N' est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ car pour f dans E, f' est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc f' est intégrable sur le segment $[0, 1]$.
(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.
(3) $\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |\lambda f'(t)|\ dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt \right) = |\lambda| N'(f)$.

(4) Soit $(f, g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E.

• Montrons que N'' est une norme sur E. On note que $\forall f \in E$, $N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ et tout est immédiat.

$$\boxed{N,\ N' \text{ et } N'' \text{ sont des normes sur } E.}$$

• Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$

$$|f(t)| = \left|f(0) + \int_0^t f'(u)\ du\right| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\ du = N'(f),$$

et donc $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ dt \leqslant \int_0^1 N'(f)\ dt = N'(f)$.

Ensuite en appliquant le résultat précédent à f', on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E,\ N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f).}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

$N(f_n) = \displaystyle\int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N).

Par contre, pour $n \geqslant 1$, $N'(f_n) = n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\ dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N'). On en déduit que

$$\boxed{\text{les normes } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas des normes équivalentes.}}$$

De même en utilisant $f_n(t) = \dfrac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Exercice n° 4

1) Soit $\begin{array}{cccc} \det : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \det(M) \end{array}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme) et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts.

Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme $\det(A - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul). Donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0, $\det\left(A - \dfrac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \dfrac{1}{p}I\right)_{p\geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, convergente, de limite A. Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.

Soit $n \geqslant 2$. Les matrices $A_p = pE_{1,1}$, $p \in \mathbb{N}$, sont non inversibles et la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Par suite $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est non borné et donc non compact.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé mais non compact.}}$$

3) • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $\begin{array}{cccc} g : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ & M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{array}$, $\begin{array}{cccc} h : & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$ puis

$\begin{array}{cccc} f : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(R) \\ & M & \mapsto & M{}^tM \end{array}$ de sorte que $f = h \circ g$.

g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

D'après le théorème de Borel-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. En effet, les deux matrices I_n et $-I_n$ sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est 0 qui n'est pas une matrice orthogonale.

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact mais non convexe.}}$$

4) $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}}$$

5) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et p un élément fixé de $[\![1, n-1]\!]$ (le résultat est clair si $p = 0$ ou $p = n$).
A est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses mineurs de format $p+1$ sont nuls.
Soient I et J deux sous-ensembles donnés de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$ et $A_{I,J}$ la matrice extraite de A de format $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J.
Pour I et J donnés, l'application $A \mapsto A_{I,J}$ est continue car linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par suite, l'application $f_{I,J}\ :\ A \mapsto \det(A_{I,J})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices A telles que $\det(A_{I,J}) = 0$ est donc un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f_{I,J}$) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

6) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On sait que toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$ telle que $A = PTP^{-1}$.

On munit dorénavant $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme multiplicative notée $\|\ \|$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif K telle que pour toute matrice M, $\|M\| \leqslant K\|M\|_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n-uplet de réels $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ tels que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$ et les $\lambda_k + \varepsilon_k$ sont deux à deux distincts. (On prend $\varepsilon_1 = 0$ puis ε_2 dans $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_2 + \varepsilon_2 \neq \lambda_1 + \varepsilon_1$ ce qui est possible puisque $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini puis ε_3 dans $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_3 + \varepsilon_3$ soit différent de $\lambda_1 + \varepsilon_1$ et $\lambda_2 + \varepsilon_2$ ce qui est possible puisque $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini ...)
On pose $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $T' = T + D$ et enfin $A' = PT'P^{-1}$. Tout d'abord les valeurs propres de A' sont deux à deux distinctes (ce sont les $\lambda_i + \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$) et donc A' est diagonalisable. Ensuite

$$\|A' - A\| = \|PDP^{-1}\| \leqslant \|P\|\|D\|\|P^{-1}\| \leqslant K\|P\|\|P^{-1}\|\|D\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

En résumé, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})/\ \|A' - A\| \leqslant \varepsilon$ et A' diagonalisable. On a montré que

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans } \mathbb{C} \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

On ne peut remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} X - a & -c+1 \\ -b-1 & X - d \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) + (b - c) + 1.$$

Le discriminant de χ_{A+E} est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) - 4(b - c) - 4$. Supposons de plus que $\|E\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{4}$. Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) - 4(b - c) - 4 \leqslant \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

Par suite, aucune des matrices $A + E$ avec $\|E\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{4}$ n'a de valeurs propres réelles et donc aucune de ces matrices n'est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

7) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est borné. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et donc $\|A\|_\infty \leqslant 1$. Ainsi, $\forall A \in \mathscr{S}$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$ et donc $\mathscr{S}$ est borné.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est fermé.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. L' application $f_{i,j} \ : \ A \mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]-\infty,0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, $\{A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} /\ a_{i,j} \geqslant 0\} = f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. L' application $g_i \ : \ A \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par suite, $\left\{A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} /\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\right\} = g_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathscr{S} = \left(\displaystyle\bigcap_{i,j} f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i} g_i^{-1}(\{1\})\right)$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, $\mathscr{S}$ est un fermé borné de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie et donc $\mathscr{S}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est convexe. Soient $(A,B) \in (\mathscr{S})^2$ et $\lambda \in [0,1]$. D'une part, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$ et d'autre part, pour $i \in [\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n}((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

ce qui montre que $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathscr{S}$. On a montré que $\forall (A,B) \in \mathscr{S}^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est convexe.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

8) Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1 \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & (1-t).A + t.0 = (1-t)A \end{array}$ et $\gamma_2 \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & tB \end{array}$. Soit enfin $\gamma \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} \gamma_1(2t) \text{ si } t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{array}\right. \end{array}$.

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_1(t) = (1-t)A$ est diagonalisable (par exemple, si $A = P\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ alors $(1-t)A = P\text{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$) et de même, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_2(t) = tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathbb{R}$, contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonalisables dans } \mathbb{R} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice n° 5

1ère solution. Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Soient $d = y - x$ puis n un entier naturel non nul tel que $\dfrac{1}{n} < d$ (par exemple, $n = E\left(\dfrac{1}{d}\right) + 1$). Soient enfin $k = E(nx)$ et $r = \dfrac{k+1}{n}$. r est un rationnel et de plus

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{k+1}{n} = r \leqslant \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + d = y.$$

En résumé, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} / \ x < r < y)$. Ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2ème solution. On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ sont denses dans } \mathbb{R}.}$$

Exercice n° 6

1) Soit A une partie de E. $\overline{A}$ est fermé et donc $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\mathring{A}$ est ouvert et donc $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

2) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Si $\overline{A} = \varnothing$ (resp. $\mathring{A} = \varnothing$), alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ (resp. $\mathring{A} \subset \mathring{B}$). Sinon,

- Pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- Pour tout $x \in E$, $x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow B \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in \mathring{B}$. Donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

3) Soient A et B deux parties de E.

$\overline{A} \cup \overline{B}$ est une partie fermée de E contenant $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant $A \cup B$).
Réciproquement, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Finalement $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.
Réciproquement , $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
Finalement, $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

4) $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ et donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$, $A \cap B = \varnothing$ puis $\overline{A \cap B} = \varnothing$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \varnothing$.

$\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$ et donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.
On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$, $A \cup B = [0, 2]$ puis $\overset{\circ}{A \cup B} =]0, 2[$ mais $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0, 1[\cup]1, 2[\neq]0, 2[$.

5) Soient A et B deux parties de E. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
x \in \overset{\circ}{A \setminus B} &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathscr{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \setminus B \\
&\Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \text{ et } \mathscr{B} \subset {}^c B \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x) \text{ et } {}^c B \in \mathscr{V}(x) \\
&\Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ et } x \in (\overset{\circ}{{}^c B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ et } x \in {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \cap {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \setminus \overline{B}.
\end{aligned}$$

Donc $\overset{\circ}{A \setminus B} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.

6) Soit A une partie de E. $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$. D'autre part $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Finalement, $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

$\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\mathring{\overline{A}}} = \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. D'autre part $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}}$. Finalement, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Exercice n° 7

L'exercice n° 6 montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Soit $A = ([0, 1[\cup]1, 2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$.

- $\mathring{A} =]0, 1[\cup]1, 2[$.
- $\overline{\mathring{A}} = [0, 2]$.
- $\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0, 2[$.
- $\overline{A} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$
- $\mathring{\overline{A}} =]0, 2[\cup]4, 5[$.
- $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0, 2] \cup [4, 5]$.

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Exercice n° 8

Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n l'application définie par $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x) + \dfrac{1}{n}\left|x - \dfrac{1}{2}\right|$.

Chaque fonction g_n est continue sur $[0,1]$ mais non dérivable en $\dfrac{1}{2}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in E \setminus D$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f - g_n\|_\infty = \dfrac{1}{2n}$. On en déduit que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_\infty)$.

f est donc limite d'une suite d'éléments de ${}^cD$ et donc est dans l'adhérence de ${}^cD$. Ceci montre que $\overline{{}^cD} = E$ ou encore ${}^c\left(\overset{\circ}{D}\right) = E$ ou enfin $\overset{\circ}{D} = \varnothing$.

Enfin, puisque $P \subset D$, on a aussi $\overset{\circ}{P} = \varnothing$.

Exercice n° 9

1) Soit $x \in E$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $d_A(x)$.

2) a) Soit A une partie fermée et non vide de E. Soit $x \in E$.
- Supposons que $x \in A$. Alors $0 \leqslant f(x) = \text{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\} \leqslant \|x-x\| = 0$ et donc $d_A(x) = 0$.
- Supposons que $d_A(x) = 0$. Par définition d'une borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A/\ \|x - a_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Soit V un voisinage de x. V contient une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ puis d'après ce qui précède, V contient un élément de A. Finalement, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est fermée, } \forall x \in E,\ (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A).}$$

b) Posons $d = d_A(x)$. Pour chaque entier naturel n, il existe $a_n \in A$ tel que $d \leqslant \|x - a_n\| \leqslant d + \dfrac{1}{n}$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_n\| \leqslant \|a_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \dfrac{1}{n} + łx\| \leqslant d + \|x\| + 1$.

Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergeant vers un certain élément a de E.

Ensuite, puisque A est fermée, on en déduit que $a \in A$. Puis, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d \leqslant \|x - a_{\varphi(n)}\| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisque $\varphi(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, on obtient quand n tend vers l'infini, $d = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$.

Maintenant on sait que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \|\ \|)$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|x - a_{\varphi(n)}\right\| = \left\|x - \lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)}\right\| = \|x - a\|.$$

On a montré qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

3) Soit $x \in E$.

Puisque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ est un minorant de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$. Comme $d_A(x)$ est le plus grand des minorants de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $\|x - y\| < d(x, \overline{A}) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et puis il existe $a \in A$ tel que $\||y - a\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que

$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Quand ε tend vers 0, on obtient $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$.

Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).}$$

4) Montrons que l'application d_A est lipschitzienne. Soit $(x, y) \in E^2$.

Soit $a \in A$. $d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|$. Donc, $\forall a \in A$, $d_A(x) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|$ ou encore $d_A(x) - \|x - y\|$ est un minorant de $\{\|y - a\|,\ a \in A\}$. Puisque $d_A(y)$ est le plus grand des minorants de $\{\|y - a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_A(x) - \|x - y\| \leqslant d_A(y)$.

En résumé, $\forall (x, y) \in E^2$, $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x - y\|$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x - y\|$ et finalement

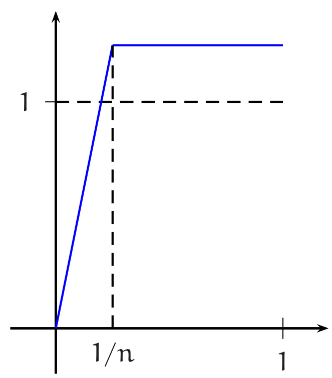
$$\forall (x,y) \in E^2,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x - y\|.$$

Ainsi l'application $d_A\ :\ \begin{array}{ccc}(E, \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & d_A(x)\end{array}$ est 1-lipschitzienne et en particulier d_A est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.

5) Soient A et B deux parties fermées et non vides de E telles que $d_A = d_B$.
Soit $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (d'après 2)) et donc $a \in B$ (d'après 2)). Ainsi $A \subset B$ puis, par symétrie des rôles, $B \subset A$ et finalement $A = B$.

6) (A n'est pas un sous espace vectoriel de E.)
Soit $f \in A$. $1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\ dt \leqslant \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty \geqslant 1$ et donc $d_A(0) \geqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \left\{\begin{array}{l}(n+1)x \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 + \dfrac{1}{n}\ x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]\end{array}\right.$.



Pour chaque entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant 1.$$

Donc, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_A(0) \leqslant \|f_n\|_\infty = 1 + \dfrac{1}{n}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant d_A(0) \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ et finalement

$$\boxed{d_A(0) = 1.}$$

Remarque. A est fermée mais la distance à A n'est malgré tout pas atteinte. En effet
• Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_\infty)$ vers un certain élément f de E. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et donc d'une part, $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et d'autre part $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx \geqslant 1$. Donc $f \in A$ et on a montré que A est fermée.
• Supposons qu'il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_\infty = 1$. Alors l'encadrement $1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx \leqslant \|f\|_\infty = 1$ fournit $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \|f\|_\infty = 1$ puis $\displaystyle\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x))\ dx = 0$ et donc $\|f\|_\infty - f = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore $f = 1$ ce qui contredit $f(0) = 0$. On ne peut donc pas trouver $f \in A$ tel que $d_A(0) = d(0, f)$.

Exercice n° 10

1) Soit $x \in E$. Puisque D est dense dans E, il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers x et puisque f et g sont continues et coincident sur D et donc en chaque d_n,

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(d_n) = \lim_{n\to+\infty} g(d_n) = g\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right) = g(x).$$

On a montré que $f = g$.

2) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Soit $a = f(1)$.

- $x = y = 0$ fournit $f(0) = 0 = a \times 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$. Ceci reste vrai pour $n = 0$.
- En particulier $x = 1$ fournit pour tout entier naturel non nul n, $f(n) = nf(1) = an$ puis $x = \dfrac{1}{n}$ fournit $nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(1) = a$ et donc $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{a}{n}$.
- Ensuite, $\forall (p, q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = pf\left(\dfrac{1}{q}\right) = a\dfrac{p}{q}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ fournit $f(-x) = -f(x)$.
- En particulier, $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\dfrac{p}{q}\right) = -f\left(\dfrac{p}{q}\right) = -a\dfrac{p}{q}$.

En résumé, si f est morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ où $a = f(1)$.

Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, les deux applications $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto ax$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. D'après le 1), $f = g$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ où $a = f(1)$.

Réciproquement, toute application linéaire $x \mapsto ax$ est en particulier un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, continu sur $\mathbb{R}$.

Les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même sont les applications linéaires $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace normé $(E, \| \ \|)$ ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note ℓ. Montrons que la suite u converge vers ℓ.

Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists \varepsilon > 0 / \ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \ \exists n \geqslant n_0 / \ \|u_n - \ell\| > \varepsilon \quad (*).$$

ε est ainsi dorénavant fixé.
En appliquant $(*)$ à $n_0 = 0$, il existe un rang $\varphi(0) \geqslant n_0 = 0$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Puis en prenant $n_0 = \varphi(0) + 1$, il existe un rang $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$ ... et on construit ainsi par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Maintenant, la suite u est bornée et il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Puisque E est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de u convergeant vers un certain $\ell' \in E$. ℓ' est donc une valeur d'adhérence de la suite u. Mais quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$, on obtient $\|\ell' - \ell\| \geqslant \varepsilon$ et donc $\ell \neq \ell'$. Ceci constitue une contradiction et donc u converge vers ℓ.

Exercice n° 12

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons $f(\alpha) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)| = \underset{n \in \mathbb{N}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|$.

- Tout d'abord $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n(\pi - \alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\pi - \alpha) = f(\alpha)$.

On en déduit que $\underset{\alpha \in]0, \pi[}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

- $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Ensuite, si $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant \sin(\alpha) \geqslant \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. Par suite $\underset{\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.
- Soit alors $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\dfrac{\pi}{3\alpha}\right)$.

Mais alors, $\dfrac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\,\alpha = n_1\alpha + \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1 + 1$ convient.

Ceci montre que $f(\alpha) \geqslant \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Finalement $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\alpha) \geqslant f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et donc $\underset{\alpha \in]0, \pi[}{\text{Inf}} \left\{\underset{n \in \mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|\right\} = \underset{\alpha \in]0, \pi[}{\text{Min}} \left\{\underset{n \in \mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|\right\} = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\boxed{\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Exercice n° 13

Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant 1)$.

Soit $x\in\mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x\in\mathbb{R}^-$).

Pour $n\in\mathbb{N}$

$$|x-n\alpha|\leqslant\alpha\Leftrightarrow-\alpha\leqslant x-n\alpha\leqslant\alpha\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}-1\leqslant n\leqslant\frac{x}{\alpha}+1\Leftarrow n=E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0=E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(x)-f(x-\alpha)|+|f(x-\alpha)-f(x-2\alpha)|+\ldots+|f(x-(n_0-1)\alpha)-f(x-n_0\alpha)|+|f(x-n_0\alpha)-f(0)|+|f(0)|\\&\leqslant n_0+1+|f(0)|\ (\text{car }|x-n_0\alpha-0|\leqslant\alpha)\\&\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $|f(x)|\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|$. Par symétrie des calculs (ou en appliquant à la fonction $x\mapsto f(-x)$), $\forall x\in\mathbb{R}^-$, $|f(x)|\leqslant\frac{-x}{\alpha}+2+|f(0)|$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant\frac{|x|}{\alpha}+2+|f(0)|$.

$$\boxed{f\text{ uniformément continue sur }\mathbb{R}\Rightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)\leqslant a|x|+b.}$$

Exercice n° 14

Posons $I_0=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et enfin $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$.

Pour $x\in D$, posons $f(x)=\tan x-x$. La fonction f est dérivable sur D et pour $x\in D$, $f'(x)=\tan^2 x$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur chaque I_n et s'annule donc au plus une fois dans chaque I_n.
$f(0)=0$ et donc f s'annule exactement une fois dans I_0 en $x_0=0$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, f est continue sur I_n et de plus $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+\right)\times f\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-\right)=-\infty\times+\infty<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans I_n et donc exactement une fois dans I_n.

L'équation $\tan x=x$ admet donc dans chaque intervalle I_n, $n\in\mathbb{N}$, une et une seule solution notée x_n. De plus, $\forall n\geqslant 1$, $f(n\pi)=-n\pi<0$ et donc $x_n\in\left]n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

Pour $n\geqslant 1$, $n\pi<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ puis $x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\pi$ et même

$$x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+O(1).$$

Ensuite, puisque $x_n-n\pi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $x_n=\tan(x_n)=\tan(x_n-n\pi)$, $x_n-n\pi=\text{Arctan}(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$. Donc

$$x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1).$$

Posons $y_n=x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}$. Alors d'après ce qui précède, $y_n\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et $y_n\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$. De plus, l'égalité $\tan(x_n)=x_n$ fournit $\tan(n\pi+\frac{\pi}{2}+y_n)=n\pi+\frac{\pi}{2}+y_n$ ou encore

$$n\pi+\frac{\pi}{2}+y_n=-\text{cotan}(y_n).$$

Puisque $y_n\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$, on obtient $n\pi\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{y_n}$ ou encore $y_n\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons $z_n = y_n + \dfrac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}$. D'après ce qui précède, $\tan\left(-\dfrac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\dfrac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + z_n}$ et aussi $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Exercice n° 15

1ère solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $1 + \dfrac{z}{n} = r_n e^{i\theta}$ où $r_n \geqslant 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ de sorte que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, e^{in\theta_n}.$$

Puisque $1 + \dfrac{z}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, pour n assez grand on a $r_n > 0$ et $\theta_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Mais alors pour n assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{\dfrac{y}{n}}{1 + \dfrac{x}{n}}\right).$$

Maintenant, $r_n^n = \exp\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(1 + \dfrac{2x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(x + o(1))$ et donc r_n^n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.

Ensuite $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\,\text{Arctan}\left(\dfrac{\dfrac{y}{n}}{1 + \dfrac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} y + o(1)$ et donc $n\theta_n$ tend vers y quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, e^{in\theta_n}$ tend vers $e^x \times e^{iy} = e^z$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2ème solution. Le résultat est connu quand z est réel. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right) z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right| |z|^k.$$

Maintenant, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{1}{k!} - \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{\overbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right| |z|^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|^n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|z|} - e^{|z|} = 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ tend vers e^z quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.