Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) On a
$$f(0,1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\quad\text{avec}\quad(0,1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}(0,0)$$
Aussi,
$$f(1/n,1/n^3)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\quad\text{avec}\quad(1/n,1/n^3)\xrightarrow[n\to+\infty]{}(0,0)$$
Ces deux limites étant distinctes, la fonction f ne peut admettre de limite en $(0,0)$.

(b) On a
$$f(0,-1/n)=2n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty\quad\text{avec}\quad(0,-1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}(0,0)$$
Aussi
$$f(0,1/n)=-2n\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty\quad\text{avec}\quad(0,1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}(0,0)$$
Ces deux limites étant distinctes, la fonction f ne peut admettre de limite en $(0,0)$.

(c) On remarque
$$0\le f(x,y)\le\frac{x^2+2|x||y|+y^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$
Par encadement, on conclut que f est de limite nulle.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) On écrit $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to0$ et alors
$$f(x,y)=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0.$$

(b) $f(1/n,0)\to0$ et $f(1/n,1/n^3)\to1$. La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

(c) $f(1/n,0)=0\to0$ et $f(1/n,1/n^2)=1/2\to1/2$. La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

(d) $f(1/n,0)=0\to0$ et $f(1/n+1/n^2,1/n)=\frac{1/n^2+1/n^3}{1/n^2}\to1$. La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $\left|f(x,y)\right|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=r|\sin\theta\cos\theta|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

(b) $f(x,y)=x\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ or $\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac12$ donc $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

(c) $f(1/n,0)\to1$ et $f(1/n,1/\ln n)\to1/\mathrm{e}$. Pas de limite en $(0,0)$.

(d) Quand $x\to0$, $f(x,-x+x^3)\sim-\frac1x$. La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) $f(x,y)=\exp(y\ln x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions continues.
Il reste à étudier la continuité aux points $(0,b)$ avec $b>0$.
Quand $(x,y)\to(0,b)$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ on a $y\ln x\to-\infty$ et donc $f(x,y)=x^y\to0$.
D'autre part, quand $(0,y)\to(0,b)$, on a $f(x,y)=0\to0$.
Ainsi f est continue en $(0,b)$.

(b) Si l'on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ alors d'une part $f(0,0)=\lim_{y\to0}f(0,y)=0$ et d'autre part $f(0,0)=\lim_{x\to0}f(x,x)=1$. C'est absurde.

Exercice 5 : [énoncé]

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}\in\,]0\,;x^2+y^2[$ tel que $F(x,y)=f'(c)$.
Quand $(x,y)\to(0,0)$ alors $c_{x,y}\to0$ puis $F(x,y)\to f'(0)$.

Exercice 6 : [énoncé]

Notons
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x^2+y^2>1\right\}\text{ et }E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x^2+y^2\le1\right\}$$
f est continue en chaque point de D et E.
Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$ (à la jonction de D et E).
Quand $(x,y)\to(x_0,y_0)$ avec $(x,y)\in D$, on a
$$f(x,y)\to\frac12x_0^2+y_0^2-1=-\frac12x_0^2=f(x_0,y_0).$$
Quand $(x,y)\to(x_0,y_0)$ avec $(x,y)\in E$, on a
$$f(x,y)\to-\frac12x_0^2=f(x_0,y_0).$$
Finalement $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ et donc f est continue en.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = a + t.(b-a)$.
Par composition $f\circ\varphi$ est continue sur le segment $[0\,;1]$.
Comme $(f\circ\varphi)(0) = f(a)$ et $(f\circ\varphi)(1) = f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $t\in[0\,;1]$ tel que $(f\circ\varphi)(t) = y$.
Pour $x = \varphi(t)\in A$ on a $y = f(x)$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Soit $f\colon t\mapsto g(R\cos t, R\sin t)$. f est continue et 2π périodique.
Soit $h\colon t\to f(t+\pi) - f(t)$. h est continue et $h(0) + h(\pi) = f(2\pi) - f(0) = 0$ donc h s'annule.

(b) Soit $h\colon t\mapsto f(t+\pi/2) - f(t)$. h est continue et
$h(0) + h(\pi/2) + h(\pi) + h(3\pi/2) = 0$ donc h s'annule.

Exercice 9 : [énoncé]
L'implication directe est immédiate. Inversement, supposons f_1 et f_2 continue.
Soit $a\in E$.
Si $a\in E_1\cap E_2$ alors la continuité de f_1 et de f_2 donne

$$f(x)\xrightarrow[x\to a, x\in E_1]{} f(a)$$

et

$$f(x)\xrightarrow[x\to a, x\in E_2]{} f(a)$$

donc

$$f(x)\xrightarrow[x\to a, x\in E]{} f(a).$$

Si $a\in E_1\setminus E_2$ alors il existe $\alpha>0$ tel que $B(a,\alpha)\subset C_E E_2$ et donc $B(a,\alpha)\subset E_1$.
Puisque f coïncide avec la fonction continue f_1 sur un voisinage de a, on peut conclure que f est continue en a.
Le raisonnement est semblable si $a\in E_2\setminus E_1$ et tous les cas ont été traités car $E = E_1\cup E_2$.

Exercice 10 : [énoncé]
Pour tout $a\in A$,

$$d(x,A)\leq \|x-a\|\leq \|x-y\| + \|y-a\|$$

donc

$$d(x,A) - \|x-y\|\leq d(y,A)$$

puis

$$d(x,A) - d(y,A)\leq \|x-y\|.$$

Par symétrie,

$$\bigl|d(x,A) - d(y,A)\bigr|\leq \|x-y\|.$$

Ainsi $x\mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne.

Exercice 11 : [énoncé]
L'ensemble

$$A = \left\{k\in\mathbb{R}_+ \;\middle|\; \forall x,y\in[a\,;b], \bigl|f(x)-f(y)\bigr|\leq k|x-y|\right\}$$

est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0.
Par suite $N(f) = \inf A$ existe.
Montrons que cet inf est en fait un min.
Pour $x,y\in[a\,;b]$ distincts, on a pour tout $k\in A$,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq k.$$

En passant à la borne inférieure, on obtient

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq N(f)$$

puis

$$\bigl|f(x)-f(y)\bigr|\leq N(f)|x-y|.$$

Cette identité est aussi valable quand $x=y$ et donc $N(f)\in A$. Par conséquent l'application $N\colon E\to\mathbb{R}_+$ est bien définie. Supposons $N(f) = 0$. Pour tout $x\in[a\,;b]$,

$$\bigl|f(x)\bigr| = \bigl|f(x)-f(a)\bigr|\leq 0.|x-a|$$

et donc $f=0$.
Pour $\lambda=0$, on a évidemment $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.
Pour $\lambda\neq 0$ et $x,y\in[a\,;b]$, l'inégalité

$$\bigl|f(x)-f(y)\bigr|\leq N(f)|x-y|$$

entraîne

$$\bigl|\lambda f(x)-\lambda f(y)\bigr|\leq |\lambda|N(f)|x-y|.$$

On en déduit $N(\lambda f)\leq|\lambda|N(f)$.

Aussi, l'inégalité

$$\left|\lambda f(x) - \lambda f(y)\right| \leq N(\lambda f)|x-y|$$

entraîne

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{N(\lambda f)}{|\lambda|}|x-y|.$$

On en déduit $N(f) \leq N(\lambda f)/|\lambda|$ et finalement $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
Enfin, pour $x, y \in [a\,;b]$,

$$\begin{aligned}\left|(f+g)(x) - (f+g)(y)\right| &\leq \left|f(x) - f(y)\right| + \left|g(x) - g(y)\right| \\ &\leq \big(N(f) + N(g)\big)|x-y|\end{aligned}$$

donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Soient $x_0 \in A$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.
Pour $f \in \mathcal{L}$, en notant k le rapport de lipschitzianité de f,

$$\left\|f(x)\right\| \leq \left\|f(x_0)\right\| + \left\|f(x) - f(x_0)\right\| \leq \left\|f(x_0)\right\| + k\|x - x_0\| \leq \left\|f(x_0)\right\| + 2kM.$$

(b) L'ensemble K_f est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0.
On en déduit que $c(f) = \inf K_f$ existe dans $\mathbb{R}_+$.
Pour $x, y \in A$ distincts, on a pour tout $k \in K_f$

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x-y)} \leq k.$$

En passant à la borne inférieure, on en déduit

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x-y)} \leq c(f)$$

et donc $N(f(x) - f(y)) \leq c(f) N(x-y)$ et cette relation est aussi valable quand $x = y$.
Ainsi $c(f) \in K_f$

(c) L'application N_a est bien définie de $\mathcal{L}$ vers $\mathbb{R}_+$.
Si $N_a(f) = 0$ alors $c(f) = 0$ et $N(f(a)) = 0$.
Par suite f est constante et $f(a) = 0$ donc f est la fonction nulle.
$N_a(\lambda f) = c(\lambda f) + |\lambda| N(f(a))$
Montrons $c(\lambda f) = |\lambda| c(f)$.
Pour $\lambda = 0$, la propriété est immédiate.
Pour $\lambda \neq 0$.
Pour tout $x, y \in A$,

$$N(f(x) - f(y)) \leq c(f) N(x-y)$$

donne

$$N(\lambda f(x) - \lambda f(y)) \leq |\lambda| c(f) N(x-y).$$

On en déduit $c(\lambda f) \leq |\lambda| c(f)$.
De façon symétrique, on obtient $c(f) \leq c(\lambda f)/|\lambda|$ et on peut conclure $c(\lambda f) = |\lambda| c(f)$.
On en déduit $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.

$$N_a(f+g) \leq N(f(a)) + N(g(a)) + c(f+g).$$

Montrons $c(f+g) \leq c(f) + c(g)$.
Pour tout $x, y \in A$,

$$N((f+g)(x) - (f+g)(y)) \leq N(f(x) - f(y)) + N(g(x) - g(y)) \leq \big(c(f) + c(g)\big) N(x-y).$$

On en déduit $c(f+g) \leq c(f) + c(g)$ et on peut conclure $N_a(f+g) \leq N_a(f) + N_a(g)$.
Finalement N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.

(d) $N(f(a)) \leq N(f(b)) + N(f(a) - f(b)) \leq N(f(b)) + \|a-b\| c(f)$.
On en déduit $N_a \leq \big(1 + \|a-b\|\big) N_b$ et de façon symétrique, $N_a \leq \big(1 + \|b-a\|\big) N_a$.

Exercice 13 : [énoncé]

Pour $u, v \in B(0,1)$, on a

$$\left\|T(u) - T(v)\right\| = \|u - v\| \leq 2\|u-v\|.$$

Pour $u, v \notin B(0,1)$, on a

$$\left\|T(u) - T(v)\right\| = \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{\big\|\|v\|u - \|u\|v\big\|}{\|u\|\|v\|}$$

or

$$\|v\|u - \|u\|v = \|v\|(u - v) + \big(\|v\| - \|u\|\big)v$$

donc

$$\left\|T(u) - T(v)\right\| \leq \frac{\|u-v\|}{\|u\|} + \frac{\big|\|v\| - \|u\|\big|}{\|u\|} \leq 2\|u-v\|$$

car $\big|\|v\| - \|u\|\big| \leq \|v-u\|$ et $\|u\| \geq 1$.
Pour $u \in B(0,1)$ et $v \notin B(0,1)$,

$$\big\|T(u)-T(v)\big\| = \left\|u - \frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{\big\|\|v\|u - v\big\|}{\|v\|} = \frac{\big|\|v\|-1\big|\|u\| + \|u-v\|}{\|v\|} \leq 2\|u-v\|$$

car $\big|\|v\|-1\big| = \|v\|-1 \leq \|v\| - \|u\| \leq \|v-u\|$ et $\|v\| \geq 1$

Exercice 14 : [énoncé]
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\big\|f(y)-f(x)\big\| = \|y-x\|$.
Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y)-f(x)\big\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - x\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - y + y - x\right\| \leq \|y\| - 1 + \|y-x\| \leq 2\|y-x\|.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y)-f(x)\big\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y-x}{\|y\|} + x\left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{\|y-x\|}{\|y\|} + \frac{\big|\|x\|-\|y\|\big|}{\|y\|} \leq 2\|y-x\|.$$

Au final f est 2-lipschitzienne.
Supposons maintenant que la norme $\|\cdot\|$ soit hilbertienne.
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors

$$\big\|f(y)-f(x)\big\| = \|y-x\|.$$

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y)-f(x)\big\|^2 - \|y-x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2\frac{\|y\|-1}{\|y\|}(x\,|\,y).$$

Or $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$ donc

$$\big\|f(y)-f(x)\big\|^2 - \|y-x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\|-1) = -(1-\|y\|)^2 \leq 0.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y)-f(x)\big\|^2 - \|y-x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|\|y\|-1}{\|x\|\|y\|}(x\,|\,y).$$

Or $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\|$ donc

$$\big\|f(y)-f(x)\big\|^2 - \|y-x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\|\|y\|-1) = -(\|x\|-\|y\|)^2 \leq 0.$$

Au final f est 1-lipschitzienne.

Exercice 15 : [énoncé]
Par contraposée. Supposons que f ne soit pas continue. L'application linéaire f n'est donc pas continue en 0_E et par suite il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \|x\| \leq \alpha \text{ et } \big\|f(x)\big\| > \varepsilon.$$

Pour $\alpha = 1/n$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leq 1/n$ et $\big\|f(x_n)\big\| > \varepsilon$.
Considérons alors $y_n = \sqrt{n}x_n$. On a $\|y_n\| \leq 1/\sqrt{n}$ donc $y_n \to 0$ et $\big\|f(y_n)\big\| > \sqrt{n}\varepsilon \to +\infty$.
Ainsi, la suite (y_n) est une suite convergeant vers 0_E dont la suite image $(f(y_n))$ n'est pas bornée.

Exercice 16 : [énoncé]
La continuité de l'application linéaire Id_E de (E, N_1) vers (E, N_2) équivaut à l'existence d'un réel $\alpha \geq 0$ vérifiant $N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$ pour tout $x \in E$. La propriété annoncée est alors immédiate.

Exercice 17 : [énoncé]
Considérons $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi\colon \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}^{d+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d)).$$

L'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de φ^{-1}.
En notant f la limite simple de (f_n), on a $\varphi(f_n) \to (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$. En notant P l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n) \to \varphi(P)$. Par continuité de l'application φ^{-1}, on a donc $f_n \to P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme équivalente $\|\cdot\|_{\infty,[a;b]}$, on peut affirmer que (f_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a\,;b]$.
En particulier (f_n) converge simplement vers P et en substance $P = f$.

Exercice 18 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons $\operatorname{rg} p \neq \operatorname{rg} q$ et, quitte à échanger, ramenons-nous au cas où $\operatorname{rg} p < \operatorname{rg} q$.
Par la formule du rang

$$\dim E - \dim \operatorname{Ker} p < \operatorname{rg} q$$

et donc

$$\dim E < \dim \operatorname{Ker} p + \operatorname{rg} q.$$

On en déduit que les espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} q$ ne sont pas supplémentaires et donc il existe un vecteur $x \neq 0_E$ vérifiant

$$x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q.$$

On a alors

$$(p-q)(x) = p(x) - q(x) = -x$$

donc

$$N((p-q)(x)) = N(x).$$

Or

$$N((p-q)(x)) < N(x).$$

C'est absurde.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Les applications ϕ et ψ sont linéaires au départ d'un espace de dimension finie donc continues.

(b) L'application f est bilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies donc continue.

(c) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé

$$AX = \lambda X \text{ avec } X \neq 0.$$

On a alors

$$A^n X = \lambda^n X$$

donc

$$\left|\lambda^n\right| \|X\|_\infty = \left\|A^n X\right\| \leq p\left\|A^n\right\| \|X\|_\infty$$

avec $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j| \neq 0$.
On en déduit que la suite (λ^n) est bornée et donc $|\lambda| \leq 1$.

(d) $B^n \to C$ donc par extraction $B^{2n} \to C$. Or $B^{2n} = B^n \times B^n \to C^2$ donc par unicité de la limite $C = C^2$. On en déduit que $\operatorname{Sp} C \subset \{0, 1\}$ car les valeurs propres figurent parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 - X$.
Puisque la suite (B^n) converge, elle est bornée et donc les valeurs propres de B sont de modules inférieurs à 1.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On a $|a_n u_n| \leq \|a\|_\infty |u_n|$ et $\sum |u_n|$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

(b) $|\langle a, u\rangle| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty |u_n| = \|a\|_\infty \|u\|_1$.
On en déduit que φ_u est continue.

(c) Par l'inégalité $|\langle a, u\rangle| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$, on obtient que ψ_a est continue.

Exercice 21 : [énoncé]
Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est continue, il suffit de déterminer $k \in \mathbb{R}$ vérifiant $\left\|f(x)\right\| \leq k\left\|x\right\|$ pour tout $x \in E$.
Pour toute suite $u = \big(u(n)\big) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on a pour tout naturel n

$$\left|T(u)(n)\right| = \left|u(n+1)\right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|u(n)\right| = \|u\|_\infty.$$

La suite $T(u)$ est effectivement bornée et

$$\left\|T(u)\right\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|T(u)\right| \leq 1 \times \left\|u\right\|_\infty.$$

L'application linéaire T est donc continue.
On obtient de même que l'application linéaire Δ est continue en observant

$$\left|\Delta(u)(n)\right| = \left|u(n+1) - u(n)\right| \leq \left|u(n+1)\right| + \left|u(n)\right| \leq 2\|u\|_\infty.$$

On peut aussi justifier que l'endomorphisme Δ est continu par différence de fonctions continues sachant $\Delta = T - \mathrm{Id}_E$ avec T et Id_E endomorphismes continus.

Exercice 22 : [énoncé]
Pour tout $f \in E$,

$$\left|\varphi(f)\right| \leq \left|f(1)\right| + \left|f(0)\right| \leq 2\|f\|_\infty$$

donc φ est continue.

Exercice 23 : [énoncé]
L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\left|T(f)(x)\right| \leq x N_1(f)$ donc

$$N_2(T(f)) = \left\|T(f)\right\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_1(f).$$

Ainsi T est continue.

Exercice 24 : [énoncé]
$T_\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|T_\varphi(f)\right| \le \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

donc T_φ est continue.

Exercice 25 : [énoncé]
Pour tout $f \in E$,

$$\left|\varphi(f)\right| = \int_0^1 \left|tf(t)\right| \,\mathrm{d}t \le \|f\|_1$$

donc φ est continue.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) L'application $N_1\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_+$ est bien définie car la somme se limite à un nombre fini de termes non nuls.
Si $N_1(P) = 0$ alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

donc $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right|$$

donc

$$N_1(P+Q) \le \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left|Q^{(k)}(0)\right| = N_1(P) + N_1(Q).$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\lambda P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| N_1(P).$$

Finalement N_1 est une norme.

L'application $N_2\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_+$ est bien définie car une fonction continue sur un segment y est bornée.
Si $N_2(P) = 0$ alors

$$\forall t \in [-1\,;1], P(t) = 0.$$

Par infinité de racines $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_2(P+Q) = \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t) + Q(t)\right| \le \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| + \left|Q(t)\right|$$

donc

$$N_2(P+Q) \le \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| + \sup_{t\in[-1;1]} \left|Q(t)\right| = N_2(P) + N_2(Q).$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1;1]} \left|\lambda P(t)\right| = \sup_{t\in[-1;1]} |\lambda| \left|P(t)\right| = |\lambda| \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| = |\lambda| N_2(P).$$

Finalement N_2 est aussi norme.

(b) Notons $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'opération de dérivation.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|D(P)^{(k)}(0)\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k+1)}(0)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^k(0)\right| = N_1(P)$$

donc l'endomorphisme D est continu pour la norme N_1.

(c) Soit $P_n = X^n$. On a $D(P_n) = nX^{n-1}$ donc $N_2(P_n) = 1$ et $N_2(D(P_n)) = n \to +\infty$.
Par suite l'endomorphisme D n'est pas continu pour N_2.

(d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc

$$\left|P(t)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} \le N_1(P)$$

donc

$$N_2(P) \le N_1(P).$$

C'est là la seule (et la meilleure) comparaison possible.

Exercice 27 : [énoncé]
u est clairement un endomorphisme de E.

$$u(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1)$$

donc

$$\left|u(f)(x)\right| \leq (1-x)\left|f(0)\right| + x\left|f(1)\right| \leq (1-x)\|f\|_\infty + x\|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Ainsi $\left\|u(f)\right\| \leq \|f\|$. L'endomorphisme u est continu.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) On a $|a_n u_n| \leq \|a\|_\infty |u_n|$ et $\sum |u_n|$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

(b)
$$|\langle a, u\rangle| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty |u_n| = \|a\|_\infty \|u\|_1.$$
On en déduit que φ_u est continue.

(c) Par l'inégalité $|\langle a, u\rangle| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$, on obtient que ψ_a est continue.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Pour $f \in E$, $\Phi(f) \in E$ car $(x,y) \mapsto K(x,y)f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de Φ est évidente.

(b) On a
$$\left\|\Phi(f)\right\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$$
et
$$\left\|\Phi(f)\right\|_1 \leq \iint_{[0;1]^2} \left|K(x,y)f(y)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$$
donc Φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

(c) On a
$$(\Phi(f)\,|\,g) = \iint_{[0;1]^2} K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (f\,|\,\Phi(g))$$
car
$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, K(x,y) = K(y,x).$$

(d) Rappelons que l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer $\left\|\Phi(f)\right\|_\infty \leq \Omega^{-1}\|f\|_\infty$.
Pour $h \in E$ et $|\lambda| < \Omega$, L'application $T\colon f \mapsto \lambda\Phi(f) + h$ est $\lambda\Omega$-lipschitzienne avec $|\lambda\Omega| < 1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application T admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f \in E$ vérifiant $h = f - \lambda\Phi(f)$.

(e) Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée d'éléments de $\mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\mathrm{Id})$. Soit $y \in [0\,;1]$ fixé et $\varphi\colon x \mapsto K(x,y)$. On peut écrire $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$ avec $\psi \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$ et
$$\mu_j = (f_j\,|\,\varphi) = \int_0^1 K(x,y)f_j(x)\,\mathrm{d}x = \lambda f_j(y).$$
Par orthogonalité
$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^p \mu_j^2.$$
En intégrant on obtient
$$\iint_{[0;1]^2} K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y)\,\mathrm{d}y = \lambda^2 p$$
car les f_j sont unitaires. Par suite $\mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\mathrm{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

Exercice 30 : [énoncé]
Notons $P_1, \dots, P_n$ les points à exclure.
Considérons une droite $\mathcal{D}$ ne passant par aucun des points $P_1, \dots, P_n$. Cette droite est une partie connexe.
Considérons un point A du plan autre que $P_1, \dots, P_n$. Il existe une infinité de droites passant par A et coupant la droite $\mathcal{D}$. Parmi celles-ci, il y en a au moins une qui ne passe par les $P_1, \dots, P_n$. On peut dont relier A à un point de la droite $\mathcal{D}$.
En transitant par cette droite, on peut alors relier par un tracé continu excluant les $P_1, \dots, P_n$, tout couple de points (A, B) autres que les $P_1, \dots, P_n$.

Exercice 31 : [énoncé]
L'image d'un arc continu par une application continue est un arc continu. Ainsi, si X est connexe par arcs et f continue définie sur X alors pour tout $f(x), f(y) \in f(X)$, l'image par f d'un arc continu reliant x et à y est un arc continue reliant $f(x)$ à $f(y)$ et donc $f(X)$ est connexe par arcs.

Exercice 32 : [énoncé]
Si les deux points à relier figurent dans un même connexe par arcs, le problème est résolu. Sinon, on transite par un point commun au deux connexes pour former un arc reliant ces deux points et inclus dans l'union.

Exercice 33 : [énoncé]
Il nous suffit d'étudier A.
Soient $a, a' \in A$. $A \subset A \cup B$ donc il existe $\varphi\colon [0\,;1] \to A \cup B$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$.
Si φ ne prend pas de valeurs dans B alors φ reste dans A et résout notre problème.
Sinon posons $t_0 = \inf\left\{t \in [0\,;1] \mid \varphi(t) \in B\right\}$ et $t_1 = \sup\left\{t \in [0\,;1] \mid \varphi(t) \in B\right\}$. φ étant continue et A, B fermés,

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B$$

$A \cap B$ étant connexe par arcs, il existe $\psi\colon [t_0\,;t_1] \to A \cap B$ continue tel que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. En considérant $\theta\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0\,;t_1]$ et $\theta(t) = \varphi(t)$ sinon, on a $\theta\colon [0\,;1] \to A$ continue et $\theta(0) = a$, $\theta(1) = a'$.
Ainsi A est connexe par arcs.

Exercice 34 : [énoncé]
Soient $a, b \in S$.
Si $a \neq -b$. On peut alors affirmer que pour tout $\lambda \in [0\,;1]$, $(1-\lambda)a + \lambda b \neq 0$.
L'application $\lambda \mapsto \frac{1}{\|(1-\lambda)a+\lambda b\|}((1-\lambda)a + \lambda b)$ est alors un chemin joignant a à b inscrit dans S.
Si $a = -b$, on transite par un point $c \neq a, b$ ce qui est possible car $n \geq 2$.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$, f est continue et $f(E \setminus H) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs donc $E \setminus H$ ne peut l'être.

(b) Oui. Introduisons une base de F notée $(e_1, \dots, e_p)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_n)$.
Sans peine tout élément $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ de $E \setminus F$ peut être lié par un chemin continue dans $E \setminus F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$ (prendre $x(t) = (1-t)x_1e_1 + \dots + (1-t)x_{n-1}e_n + ((1-t)x_n + t)e_n$).
De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continue dans $E \setminus F$ en prenant $x(t) = (1-2t)e_n + (t-t^2)e_{n-1}$. Ainsi $E \setminus F$ est connexe par arcs.

Exercice 36 : [énoncé]
L'application $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par celle-ci est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne peut l'être.

Exercice 37 : [énoncé]
Pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il suffit d'observer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relier continûment dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à la matrice I_n.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP = (b_{i,j})$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Nous allons construire un chemin continue joignant I_n à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puis en déduire un chemin joignant I_n à A lui aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour $i > j$, posons $m_{i,j}(t) = 0$.
Pour $i < j$, posons $m_{i,j}(t) = tb_{i,j}$ de sorte que $m_{i,j}(0) = 0$ et $m_{i,j}(1) = b_{i,j}$.
Pour $i = j$, on peut écrire $b_{i,i} = \rho_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}$ avec $\rho_i \neq 0$. Posons $m_{i,i}(t) = \rho_i^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta_i}$ de sorte que $m_{i,i}(0) = 1$, $m_{i,i}(1) = b_{i,i}$ et

$$\forall t \in [0\,;1], m_{i,i}(t) \neq 0.$$

L'application $t \mapsto M(t) = (m_{i,j}(t))$ est continue, elle joint I_n à B et ses valeurs prises sont des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls, ce sont donc des matrices inversibles.
En considérant $t \mapsto PM(t)P^{-1}$, on dispose d'un chemin continu joignant I_n à A et restant inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 38 : [énoncé]
On sait

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Par ce paramétrage, on peut affirmer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexes par arcs, car image continue de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 39 : [énoncé]
X est une partie connexe par arcs (car convexe) et φ est continue donc $\varphi(X)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle.
De plus $0 \notin \varphi(X)$ donc $\varphi(X) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\varphi(X) \subset \mathbb{R}_-^*$ et on peut conclure.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) A est une partie convexe donc connexe par arcs.

(b) L'application δ est continue donc $\delta(A)$ est connexe par arcs c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Puisque f' prend des valeurs strictement positives et strictement négative, la fonction f n'est pas monotone et par conséquent des valeurs positives et négatives appartiennent à l'intervalle $\delta(A)$. Par conséquent $0 \in \delta(A)$.

(c) Puisque $0 \in \delta(A)$, il existe $a < b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. On applique le théorème de Rolle sur $[a\,;b]$ avant de conclure.

Exercice 41 : [énoncé]
On vérifie aisément

$$\forall A \in \mathcal{N}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.A \in \mathcal{N}.$$

On a donc immédiatement

$$\forall A \in \mathcal{N}, [O_n\,; A] \subset \mathcal{N}.$$

L'ensemble $\mathcal{N}$ est donc étoilé en O_n (au surplus, c'est un ensemble connexe par arcs).