Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons que $f(2\times 0) = 2\times f(0)$ implique $f(0) = 0$.
On a
$$f(x) = f(2\times x/2) = 2f(x/2).$$
Par récurrence
$$f(x) = 2^n f(x/2^n).$$
Donc
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} \to f'(0)$$
puis
$$f(x) = f'(0)x.$$

Exercice 2 : [énoncé]
Un tel résultat est déjà connu pour les fonctions à valeurs réelles par application du théorème des accroissements finis. En raisonnant via parties réelles et imaginaires on peut étendre ce résultat au cas d'une fonction complexe. En raisonnant via les fonctions coordonnées dans une base de E, on prolonge ce résultat aux fonctions à valeurs dans E.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant. La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction D_n est dérivable avec
$$D_n' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2', \dots, C_n) + \cdots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$
et donc
$$D_n' = \det(C_1, C_2, \dots, C_n').$$
En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient :
$$D_n'(x) = D_{n-1}(x).$$

(b) Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence,
$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 4 : [énoncé]
Par la dérivabilité à droite de f en 0, on peut écrire
$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + x\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon \underset{0^+}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $f(0) = 0$, on obtient
$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.f'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
En exploitant
$$\left\|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right\| \leq \max_{]0;1/n]}\|\varepsilon\|$$
et
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
on obtient
$$\left\|S_n - \frac{n+1}{2n}f'(0)\right\| \leq \frac{n+1}{2n}\max_{]0;1/n]}\|\varepsilon\|.$$
Or $\varepsilon \underset{0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $\max_{]0;1/n]}\|\varepsilon\| \to 0$ puis
$$S_n \to \frac{1}{2}f'(0).$$

Exercice 5 : [énoncé]
On introduit la fonction $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}.$$
Cette fonction est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ avec
$$f'(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}.$$
De plus, $f(a) = f(b) = 0$ et donc, par le théorème de Rolle, il existe $d \in]a\,;b[$ tel que $f'(d) = 0$. Au surplus, $f'(a) = 0$ et une nouvelle application du théorème de Rolle – à la fonction f' cette fois – donne l'existence de $c \in]a\,;d[\subset]a\,;b[$ telle
$$f''(c) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = -1$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Pour $0 \leq p < n+1$.
Si $p = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^p = (1-1)^{n+1} = 0$.
Si $0 < p < n+1$ alors $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^p = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}k^{p-1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(k+1)^{p-1} = 0$ après développement du $(k+1)^{p-1}$.
Si $p = n+1$ alors
$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^{n+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(k+1)^n = (-1)^{n+1}(n+1)!$.
Récurrence établie.

(b) Par Taylor Young : $f(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + \mathrm{o}(x^n)$ donc
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(kh) = \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p + \mathrm{o}(h^n) \to (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Exercice 7 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

donc

$$h\left|f'(x)\right| \leq \left|f(x+h)\right| + \left|f(x)\right| + \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

puis

$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

Si f ou f'' est la fonction nulle, on peut conclure. Sinon, pour $h = 2\sqrt{\|f\|_\infty/\|f''\|_\infty} > 0$, on obtient

$$\left|f'(x)\right| \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$$

et l'on peut à nouveau conclure.

Exercice 8 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0)\right\| \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty$$

et

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) + \frac{1}{2}f'(1)\right\| \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty.$$

On en déduit

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty \text{ et } \left|\left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| - \|f(1)\|\right| \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty$$

donc

$$1 = \|f(1)\| \leq \|f(1)\| - \left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| + \left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leq \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

puis $\|f''\|_\infty \geq 4$.

Exercice 9 : [énoncé]
L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$M(t+2\pi) = M(t)$.
$M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox).
$M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point O.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries de centre O et d'axe (Ox).
Tableau des variations simultanées

t	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	3
$x(t)$	1	$\searrow$	$-1/\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	-2
$m(t)$	∞		0		∞		$-2/3$

Il y a deux points doubles. Pour des raisons de symétrie, ceux-ci correspondent à une abscisse nulle. On obtient un point double pour $t = \pi/6$ et $t' = 7\pi/6$ de coordonnées $(0, \sqrt{3}/2)$. Par symétrie, l'autre point double est de coordonnées $(0, -\sqrt{3}/2)$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi) = f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
$f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Oy)
$f(\pi/2 - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la droit Δ: $y = x$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

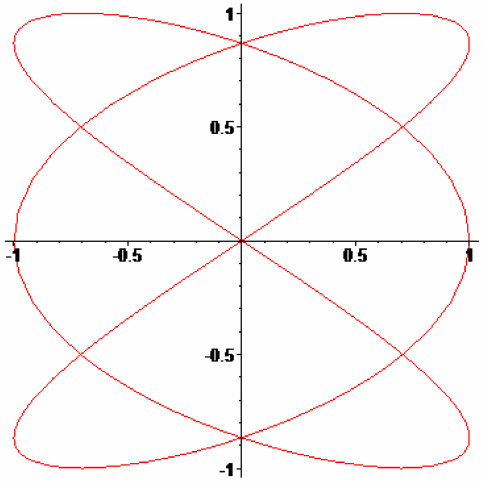

FIGURE 1 – La courbe paramétrée $x = \cos 3t, y = \sin 2t$

On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi/4]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries d'axe Δ, (Oy) puis (Ox).
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t). \end{cases}$$

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	$-3/\sqrt{8}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$2^{-3/2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2^{-3/2}$
$y'(t)$	0	$+$	$3/\sqrt{8}$
$m(t)$	$?$	$-$	-1

Étude en $t = 0$, le paramètre n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-3/2t^2} \to 0.$$

La tangente est donc dirigée par l'axe des abscisses.

(b) L'équation de la tangente au point de paramètre t est

$$y = -\tan(t)\big(x - \cos^3(t)\big) + \sin^3(t).$$

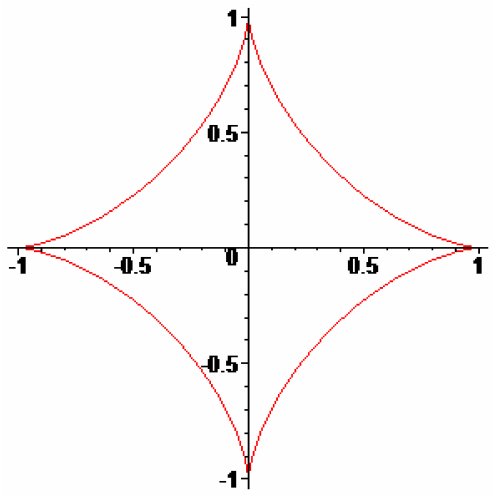

FIGURE 2 – L'astroïde

On a $A(t)\left|\begin{matrix} 0 \\ \sin(t) \end{matrix}\right.$ et $B(t)\left|\begin{matrix} \cos(t) \\ 0 \end{matrix}\right.$ et donc

$$A(t)B(t) = 1.$$

Exercice 11 : [énoncé]
L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t + 2\pi)$ est l'image de $f(t)$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Oy) et par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t). \end{cases}$$

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	2
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y(t)$	0	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$+$	0

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

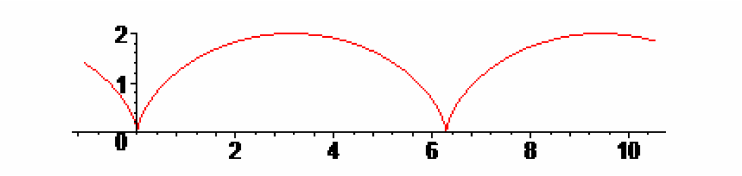

FIGURE 3 – La cycloïde

Le paramètre $t = 0$ n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} \to +\infty.$$

La courbe présente donc une tangente verticale en l'origine.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ et $f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport au point O.
$f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox) et la symétrie de centre O.
Tableau des variations simultanées
On pose $t_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$. On a $\cos t_0 = 1/\sqrt{3}$ et $\sin t_0 = \sqrt{2/3}$.

[Une figure]

[Une figure]

La lemniscate de Bernoulli

(b) On a

$$MF^2 = \frac{\sin^2}{(1+\cos^2 t)} + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t} \text{ et } MF'^2 = \frac{\sin^2}{(1+\cos^2 t)} + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$$

donc

$$MF^2 MF'^2 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ et $f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Ox).
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox).
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \iff t = 0, 2\pi/3, \pi \\ y'(t) = 0 \iff t = \pi/3, \pi. \end{cases}$$

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$x(t)$	3	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0
$m(t)$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	?

Le point de paramètre $t = \pi$ est stationnaire. Cependant

$$\frac{y(t)-y(\pi)}{x(t)-x(\pi)} \underset{t\to\pi}{\sim} t - \pi \to 0.$$

La courbe présente donc une tangente horizontale en $t = \pi$.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons $f(t) = (x(t), y(t))$ avec x et y fonctions dérivables. Le point de paramètre t appartient à la droite D_t et donc

$$(t^3+3t)x(t) - 2y(t) = t^3 \qquad (1).$$

Le vecteur $f'(t)$ dirige la droite D_t donc

$$(t^3+3t)x'(t) - 2y'(t) = 0 \qquad (2).$$

En dérivant (1) et en exploitant (2) on obtient :

$$(3t^2+3)x(t) = 3t^2$$

donc

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ et } y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

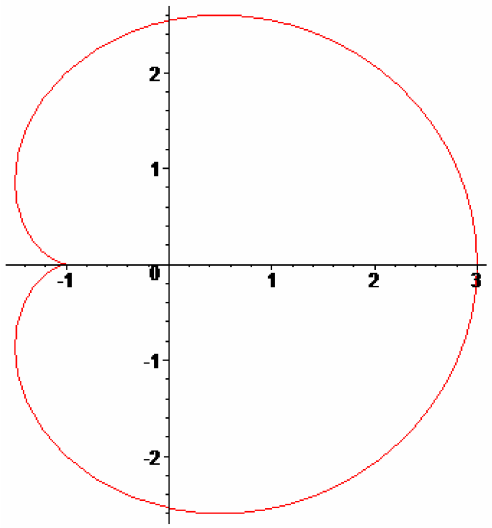

FIGURE 4 – La cardioïde

L'application $t \mapsto f(t)$ correspondante est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Ox).
On peut limiter l'étude à l'intervalle $\mathbb{R}_+$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox).

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

.

Étude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Il y a donc une tangente horizontale en le point de paramètre $t = 0$.
Étude quand $t \to +\infty$
$x(t) \to 1^-$ et $y(t) \to +\infty$
La droite est asymptote à la courbe et celle-ci est à gauche de la droite.

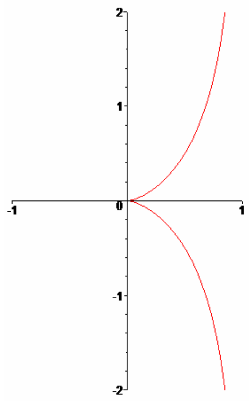

FIGURE 5 – La courbe solution

Exercice 15 : [énoncé]
Notons $f(t)$ la fonction définissant ce paramétrage.

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Les points désignés par $f(-t)$ et $f(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).
Étude limitée à $[0\,;+\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox)

$$\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \iff t = 0 \\ y'(t) = 0 \iff t = 0. \end{cases}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

.

Étude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Il y a une tangente horizontale en $t = 0$

(b) Pour $t \neq 0$, la tangente $\mathcal{D}_t$ en M a pour équation

$$-t^2(x - 3t^2) + t(y - 2t^3) = 0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

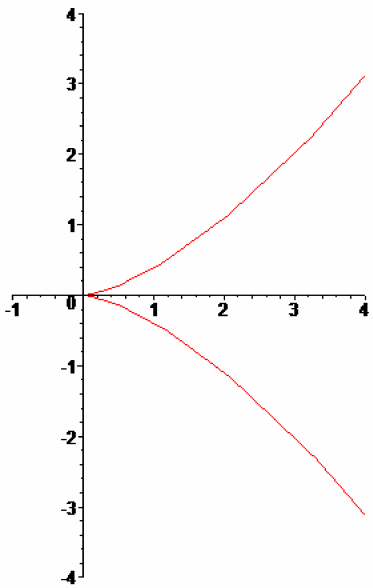

FIGURE 6 – La courbe $x = 3t^2, y = 2t^3$

soit
$$tx - y = t^3.$$
Pour $t \neq 0$, la normale $\mathcal{N}_t$ en M a pour équation
$$t(x - 3t^2) - t^2(y - 2t^3) = 0$$
soit
$$tx - t^2 y = 3t^3 - 2t^5.$$
Ces équations sont encore valables pour $t = 0$.

(c) La tangente $\mathcal{D}_t$ est normale à la courbe au point N de paramètre τ si, et seulement si,
$$\begin{cases} 3t\tau^2 - 2\tau^3 = t^3 \\ t\tau + t^2\tau^2 = 0 \end{cases}$$
ce qui traduit $N \in \mathcal{D}_t$ et l'orthogonalité des tangentes en M et N.
Si $t = 0$ alors $\tau = 0$ mais le couple $(0, 0)$ n'est pas solution.
Si $t \neq 0$ alors $\tau \neq 0$ et $\tau = -1/t$ puis $\frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} = t^3$ d'où $(t^2 + 1)^2(t^2 - 2) = 0$ ce qui donne $t = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Exercice 16 : [énoncé]
Notons $f(t)$ la fonction définissant ce paramétrage.

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;+\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Oy).
Tableau des variations simultanées
$$\begin{cases} x'(t) = 12t^2 \\ y'(t) = 12t^3. \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \iff t = 0 \\ y'(t) = 0 \iff t = 0. \end{cases}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

Étude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant
$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$
Il y a une tangente horizontale

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

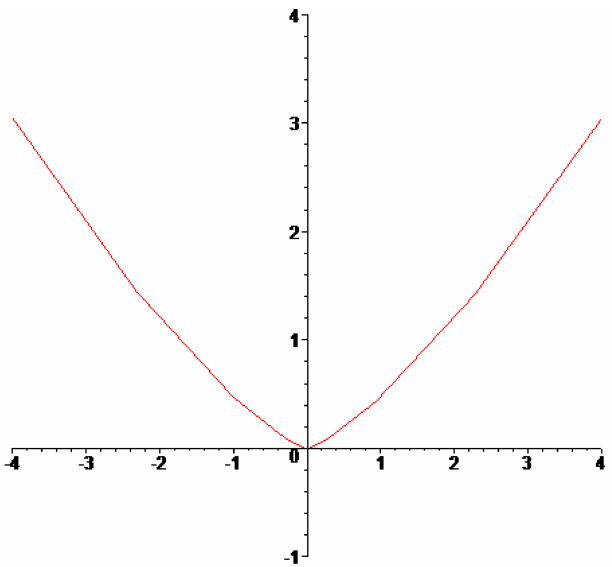

FIGURE 7 – La courbe $x = 4t^3, y = 3t^2$

(b) Pour $t \neq 0$, la tangente en M a pour équation :

$$tx - y = t^4.$$

En $t = 0$: cette équation convient encore.

(c) Les tangentes en M et N de paramètres t et τ et $M(\tau)$ sont orthogonales si, et seulement si, $1 + t\tau = 0$
Si tel est le cas leur intersection est solution du système

$$\begin{cases} tx - y = t^4 \\ -\frac{1}{t}x - y = \frac{1}{t^4}. \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} x = t^3 - t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \\ y = -t^2 + 1 - \frac{1}{t^2}. \end{cases}$$

Notons $g(t)$ la fonction définissant le paramétrage de la courbe ainsi obtenue, $t \in \mathbb{R}^*$
$g(-t)$ est le symétrique de $g(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
Les points $g(t)$ et $g(1/t)$ sont confondus.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $]0\,;1]$.

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4} = \frac{(1+t^2)(3t^4-4t^2+3)}{t^4} \\ y'(t) = -2t + \frac{2}{t^3} = \frac{2(1-t^4)}{t^3}. \end{cases}$$

Tableau des variations simultanées

t	0		1
$x'(t)$		$-$	4
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0

Exercice 17 : [énoncé]
Soit a un point du cercle limite de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$.
Soit $\gamma\colon]-\varepsilon\,;\varepsilon[\to D$ une application dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$.
Puisque l'application γ est à valeurs dans D, on a

$$\forall t \in]-\varepsilon\,;\varepsilon[, \left\|\gamma(t)\right\|^2 \leq R^2.$$

Or $\left\|\gamma(0)\right\|^2 = R^2$ et donc l'application $t \mapsto \left\|\gamma(t)\right\|^2$ admet un maximum en $t = 0$.
Son nombre dérivé y est alors nul ce qui fournit

$$2\langle \gamma'(0), \gamma(0)\rangle = 0.$$

Ainsi, le vecteur tangent $v = \gamma'(0)$ est orthogonal au vecteur rayon $a = \gamma(0)$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

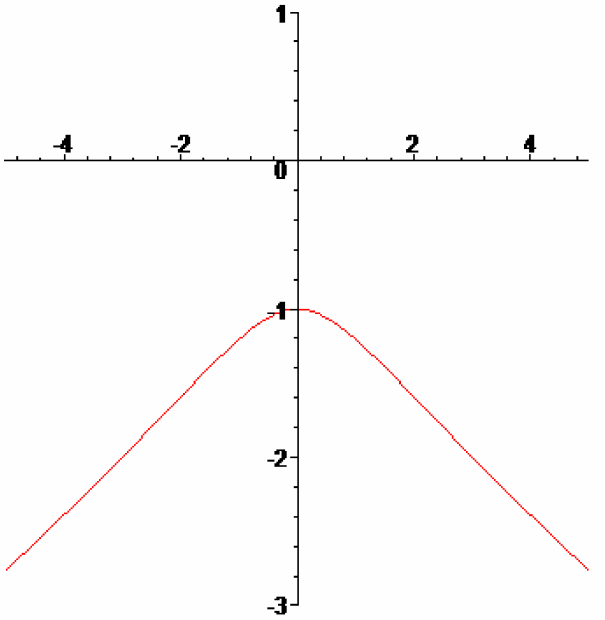

FIGURE 8 – La courbe des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD