Planche n° 19. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé

Exercice n° 1

1) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\dfrac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}|xy|$. Comme $\dfrac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \dfrac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.
$\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \dfrac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \dfrac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

7) f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé de la surface d'équation $x^2-y^2+z^2=0$.
$f(x,0,0) = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8) $f(2+h,-2+k,l) = \dfrac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\dfrac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \dfrac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Exercice n° 2

- f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
- f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{|xy|\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est de classe C^0 au moins sur $\mathbb{R}^2$.

- **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x, y) \neq (0, 0)$ $f(x, y) = -f(y, x)$. Donc pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

• **Existence de** $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$**.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

• **Continuité de** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **en** $(0, 0)$**.** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| = \frac{|y||x^4 + 4x^2y^2 - y^4|}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice n° 3

On pose $D = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(0, 0)$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \begin{cases} y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} = y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x, y) tend vers 0, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = f(0, 0)$ et donc f est continue en $(0, 0)$ puis

f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0.$$

Donc $\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left\{\begin{array}{l} y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right..$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}=\frac{y^2\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)}{y}=y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right|\leqslant |y|$ puis que $\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left\{\begin{array}{l} 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right..$$

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l} |y|\left|\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right.\leqslant |y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0=0$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l} \left|2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right.\leqslant 2|y|+|x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x|+2|y|$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Supposons maintenant $x_0\neq 0$. Pour $y\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)=2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)-x_0\cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)\right|\leqslant 2|y|$ et $x_0\cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0\neq 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0\neq 0$. On a montré que

f est de classe C^1 sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$ et pas plus.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{0-0}{x}=0.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\dfrac{0}{y}\right)}{y}=1.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. On a montré que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Exercice n° 4

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda>0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)=r\lambda^{r-1}f(x),$$

et pour $\lambda=1$, on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Exercice n° 5

1) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2xy=0\\ x^2+\dfrac{2y}{1+y^2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right..$$

Si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Réciproquement, pour tout réel $x\neq 0$, $f\left(x,x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=x^4+\ln\left(1+x^4\right)>0$. Puisque $\left(x,x^2\right)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to}(0,0)$, l'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de $(0,0)$.
D'autre part, pour tout réel $x\neq 0$, $f\left(x,-x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=-x^4+\ln\left(1+x^4\right)<0$ (inégalité de convexité). L'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend aussi des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0,0)$.

Ainsi, $f(0,0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local et finalement, f n'a pas d'extremum local.

2) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4(x-y)+4x^3=0\\ 4(x-y)+4y^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^3+y^3=0\\ -4(x-y)+4x^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-x\\ x^3-2x=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}.$$

• Etude en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-8$ puis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}f(x,y)-f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)&=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8\geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2\left(x^2+y^2\right)+8\\&=x^4-4x^2+y^4-4y^2+8=\left(x^2-2\right)^2+\left(y^2-2\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

et donc f admet un minimum global en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $(0,0)$. $f(0,0)=0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=2x^4>0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Exercice n° 6

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A+H\in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1}-A^{-1}=(A+H)^{-1}(I_n-(A+H)A^{-1})=-(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}&=-(A+H)^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1}=(A+H)^{-1}(-HA^{-1}+(A+H)A^{-1}HA^{-1})\\&=(A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H)-f(A)+A^{-1}HA^{-1}\right\|=\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\|\leqslant\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|^2$.

Maintenant, la formule $M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}{}^t(\text{com}(M))$, valable pour tout $M\in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M\mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0}\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|=0\text{ et donc }\lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\|=0.$$

Comme l'application $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A\in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H)=-A^{-1}HA^{-1}.}$$

Exercice n° 7

Pour tout complexe z tel que $|z|\leqslant 1$,

$$|\sin(z)|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\text{sh}(|z|)\leqslant\text{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z=i$ car $|\sin(i)|=\left|\dfrac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}\right|=\dfrac{e-e^{-1}}{2}=\text{sh}(1)$.

$$\boxed{\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}=\text{sh}(1).}$$

Exercice n° 8

1) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y)=g(u,v)$ où $u=x+y$ et $v=x+2y$. L'application $(x,y)\mapsto(x+y,x+2y)=(u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v))=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial u}=0 \Leftrightarrow \exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v) \Leftrightarrow \exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y)\mapsto h(x+2y) \text{ où } h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y)\mapsto\cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

2) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Posons $f(x,y)=g(r,\theta)$ où $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta}=0 \Leftrightarrow \exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta)=h_1(r)\\ &\Leftrightarrow \exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y)\mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & (u,uv)=(x,y)\end{array}$. Donc si on pose $f(x,y)=g(u,v)$, on a $g=f\circ\varphi$.

Soit $(x,y,u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v)=(x,y)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=x\\ uv=y\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}u=x\\ v=\dfrac{y}{x}\end{array}\right..$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial v}=\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right)+\left(\dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\dfrac{2y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial v}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}-\dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}+2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v}-\frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\&=x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0\Leftrightarrow \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0$$

$$\Leftrightarrow \exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=h(v)$$

$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v)=uh(v)+k(v)$$

$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y)=xh(xy)+k(xy).$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice nº 9

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \|(x,y)\|=\text{Max}\{\|x\|_2,\|y\|_2\}$.

• Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,k))=(a+h).(b+k)=a.b+a.h+b.k+h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h))-f((a,b))=(a.h+b.k)+h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k)\neq(0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=|h.k|\leqslant\|h\|_2\|k\|_2\leqslant\|(h,k)\|^2,$$

et donc $\dfrac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|\leqslant\|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=0.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k)=a.h+b.k$.

Exercice nº 10

1ère solution. Pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}}=\frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et pour $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $h\in\mathbb{R}^n$

$$df_x(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i=\frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_ih_i=\frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2=\frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\dfrac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\,\|x\|_2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)| \leqslant \|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h \underset{h\to 0}{=} O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)\,(x|h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\dfrac{-\left(\|x+h\|_2 - \|x\|_2\right)(x|h) + \|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\,\|x\|_2} \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h\to 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \dfrac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = \dfrac{x|h}{\|x\|_2}$.

• Vérifions que f n'est pas différentiable en 0. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}\left(\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)\right) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1 - L\left(\dfrac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \dfrac{t}{|t|}L\left(\dfrac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Exercice n° 11

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u =$ aire de MBC, $v =$ aire de MCA et $w =$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathscr{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v) \mapsto uv(\mathscr{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \text{ et } u+v \leqslant \mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u+v \leqslant \mathscr{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v) \mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v) \mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u+v \leqslant \mathscr{A}\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,\mathscr{A}])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.

Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v) = 0$. Comme f est strictement positive sur $\mathring{T} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u > 0,\ v > 0 \text{ et } u+v < 0\}$, f admet son maximum dans $\mathring{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathring{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0) \in \mathring{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f. Soit $(u,v) \in \mathring{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v(\mathscr{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathscr{A} - u - 2v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u + v = \mathscr{A} \\ u + 2v = \mathscr{A} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0, v_0) = \left(\frac{\mathscr{A}}{3}, \frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0, v_0) = \frac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a

$$M = \text{bar}\left((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB)\right).$$

Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Exercice n° 12

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = MA + MB \geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x, y) de la forme $(\lambda a, (1-\lambda)a)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Exercice n° 13

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2\frac{\sin(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) \\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2\frac{\cos(2x)\,\text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= -2\cos(2x)\frac{2\,\text{ch}^3(2y) - 4\,\text{sh}^2(2y)\,\text{ch}(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)\,\text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) \\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)}(-\text{ch}^2(2y) + 2) f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)(\text{ch}^2(2y) - 1)}{\text{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\text{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x, y) = -2\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)} = \cos(2x)$ décrit $[-1, 1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = [-1, 1]$. Par suite,

$$\forall (x, y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1],\ (1 - t^2) f''(t) - 2t f'(t) = 0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \in \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \frac{\lambda}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu.$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\lambda \neq 0$.

L'application $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ convient.

Exercice n° 14

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2 + s^2 = 1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de SCHWARZ, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ceci s'écrit encore $\dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\dfrac{\partial c}{\partial x} + s\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c\dfrac{\partial c}{\partial y} + s\dfrac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et f est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
Montrer que f est une rotation affine.