Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Une telle fonction ne prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs, or si celle-ci n'est pas constante, elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non singulier ce qui constitue un nombre non dénombrable de valeurs. Une telle fonction ne peut donc exister.

Exercice 2 : [énoncé]
L'ensemble A est par définition une partie de $\mathbb{N}$. Puisque l'application φ est bijective, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A = \varphi(n)$. Étudions alors l'appartenance de n à la partie A.
Si $n \in A$ alors $n \notin \varphi(n)$ mais $A = \varphi(n)$: c'est absurde.
Si $n \notin A$ alors $n \notin \varphi(n)$ et donc $n \in A$: c'est à nouveau absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Ce sont les nombres rationnels.

(b) Les nombres algébriques de degré au plus n sont les solutions des équations

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0.$$

Puisque $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$ est un ensemble dénombrable, ces équations sont en nombre dénombrable. De plus, chacune possède au plus n solutions. On peut donc percevoir l'ensemble des nombres algébriques comme une réunion dénombrable d'ensembles tous finis, c'est donc un ensemble dénombrable.

(c) L'ensemble des nombres algébriques est la réunion dénombrable des ensembles précédents, c'est donc un ensemble dénombrable.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2}.$$

(b) La somme des longueurs des intervalles réunis vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

La réunion de ces intervalles ne peut donc recouvrir $[0\,;1]$.

(c) (x_n) est une suite bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente et cette dernière a sa limite dans $[0\,;1]$.

(d) Par l'absurde, supposons $[0\,;1]$ dénombrable et considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ses éléments.
On reprend la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme ci-dessus et la limite ℓ introduite.
Puisque celle-ci est élément de $[0\,;1]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \ell$. Puisqu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers ℓ, il existe une infinité de termes de cette suite dans l'intervalle

$$[\ell - 1/2^{N+2}\,; \ell + 1/2^{N+2}] = [u_N - 1/2^{N+2}\,; u_N + 1/2^{N+2}].$$

Or, par construction, pour tout $n \geq N$, l'élément x_n est extérieur à cet intervalle. C'est absurde !

Exercice 5 : [énoncé]
Notons E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des parties finies de $[\![0\,;n]\!]$. Puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ est nécessairement majorée, on peut affirmer l'égalité

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Les ensembles E_n étant finis et la réunion dénombrable, on peut affirmer que E est dénombrable en tant qu'ensemble infini réunion dénombrable de parties au plus dénombrables. On peut aussi propose un dénombrement expliciter. Si l'on note $i_1, \ldots, i_k$ les éléments d'une partie A finie de $\mathbb{N}$, on peut lui associer l'entier

$$n(A) = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}.$$

L'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier en somme de puissances de 2 assurant la bijectivité de cette association.

Exercice 6 : [énoncé]
On a l'encadrement

$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}.$$

La sommabilité de la famille étudiée équivaut à celle de

$$\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}.$$

En regroupant par paquets selon

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \,\middle|\, p+q=n\right\}$$

celle-ci équivaut à la sommabilité de

$$\left(\frac{n-1}{n^{2\alpha}}\right)_{n\geq 2}$$

qui est vraie si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 7 : [énoncé]
Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n,k \in \mathbb{N}.$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \left\{2^n(2k+1) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M.
On a $|u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

(b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.
Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k||v_{n-k}| < +\infty.$$

Puisque

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k||v_{n-k}|$$

on a obtient $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} v_\ell.$$

(c) On a

$$(u*v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v*u)_n$$

et

$$((u*v)*w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u*(v*w))_n.$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u*\varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.

(d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.
Si u est inversible et v son inverse, la relation $u*v = \varepsilon$ donne
$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$.
Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 0$. De même pour tout $n < 0, v_n = 0$
Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.
L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ n'est pas un groupe.

Exercice 9 : [énoncé]
Étudions la sommabilité de $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut décomposer

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*.$$

La sous-famille $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum |q|^n$ converge.
De même, la sous-famille $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.
Par sommation par paquets $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. De plus

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}_-^*} q^{-n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1+q}{1-q}.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Étudions la sommabilité de $\left(\left|r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right|\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut décomposer

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*.$$

La sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum r^n$ converge.
De même, la sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.
Par sommation par paquets $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
La somme étudiée existe donc et en sommant par paquets

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}_-^*} r^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 + \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Exercice 11 : [énoncé]
On a

$$\sum_{k=0}^{n} |v_k| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$$

donc $\sum_{n\ge 0} v_n$ est absolument convergente.
Pour $n\in\mathbb{N}$, posons

$$p(n) = \max\left\{\sigma^{-1}(k) \mid 0 \le k \le n\right\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\ge N+1} |u_n| \le \varepsilon$.
Pour tout $M \ge p(N)$:

$$\left|\sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{N} u_n\right| \le \sum_{n\ge N+1} |u_n| \le \varepsilon$$

donc

$$\left|\sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \le 2\varepsilon.$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\ge 1}$ est sommable.
Il en est de même de la famille permutée $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n\ge 1}$ et donc la série $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

(b) C'est analogue, mais cette fois la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge 1}$ n'est pas sommable et la série à termes positifs $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}.$$

On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \ge \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$

Or les entiers $\sigma(n+1),\dots,\sigma(2n)$ sont, à l'ordre près, au moins égaux à $1,\dots,n$ et donc

$$S_{2n} - S_n \ge \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \ge \frac{1}{8}.$$

On en déduit que (S_n) diverge.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2\ln k}.$$

On a

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sigma(k) \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} k$$

car les entiers $\sigma(k)$ de la première somme sont aux moins égaux aux entiers k de la seconde.
On en déduit
et donc

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n(2^n+1)}{2^{2n+3}(n+1)\ln 2} \sim \frac{1}{8\ln 2}\frac{1}{n}.$$

Puisque la série $\sum 1/n$ diverge, il en de même de la série télescopique $\sum S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ et donc la suite (S_{2^n}) tend vers $+\infty$. On en déduit la divergence de la série étudiée.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La permutation des termes d'une série à termes positifs ne change ni sa nature, ni sa somme. On peut donc affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

(b) En vertu de la majoration

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

on a

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Par comparaison de série à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série $\sum |u_n v_n|$ ...

(c) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

De plus, cette inégalité est une égalité quand $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ donc

$$\sup\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \;\middle|\; \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

On a évidemment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \geq 0.$$

Pour montrer que la borne inférieure cherchée est 0, montrons que l'on peut rendre la somme précédente aussi petite que l'on veut. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la série $\sum u_n^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^2 \leq \varepsilon.$$

De plus la suite (u_n) tend vers 0, elle est donc bornée par un certain $M > 0$ et il existe un rang $N' > N$ tel que

$$\forall n \geq N', |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M(N+1)}.$$

Considérons alors la bijection σ de $\mathbb{N}$ déterminée par

$$\sigma(n) = \begin{cases} N'+n & \text{si } n \in \{0,\dots,N\} \\ n-N' & \text{si } n \in \{N',\dots,N'+N\} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour cette permutation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n| \frac{\varepsilon}{M(N+1)} + \sum_{n=N'}^{N'+N-1} \frac{\varepsilon}{M(N+1)} |u_{n-N'}| + \varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

On peut donc affirmer

$$\inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \;\middle|\; \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Pour $N \in \mathbb{N}$ posons $A_N = \{n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq N\}$.
Pour $n, m \in A_N$ distincts, les disques ouverts de centres z_n et z_m et de rayon $1/2$ sont disjoints. La réunion de ces disques pour n parcourant A_N, est incluse dans le disque de centre 0 et de rayon $N + 1/2$. Par considération d'aire, on obtient

$$\operatorname{Card} A_N \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \pi\left(N + \frac{1}{2}\right)^2$$

et donc
$$\operatorname{Card} A_N \leq (2N+1)^2.$$
Quitte à permuter les termes de la suite, supposons la suite $(|z_n|)$ croissante (ceci est possible, car il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite de module inférieur à une constante donnée). En vertu de l'étude qui précède
$$|z_{(2N+1)^2+1}| > N$$
et on en déduit
$$\frac{1}{|z_p|^3} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right).$$
La série permutée de terme général $1/z_n^3$ est donc absolument convergente et la série initiale l'est donc aussi.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante :
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$
donc
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.
Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k\geq 0}|u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$
avec convergence des séries sous-jacentes.
Or
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
La série $\sum_{p\geq 1} u_{p,q}$ est absolument convergente et
$$\sum_{p=1}^{+\infty}|u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}.$$
De plus la série de terme général $\frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert.
La famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ est donc sommable et on a
$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$
ce qui fournit la relation
$$\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{a^{2q-1}}{1-a^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}.$$

Exercice 19 : [énoncé]
D'une part $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$.
D'autre par $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.
La formule de Fubini ne s'applique pas, la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

Exercice 20 : [énoncé]
Notons que les termes sommés sont positifs.
Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$.
Par télescopage
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) = \frac{1}{q^2}.$$
La série $\sum_{q\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille
$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 21 : [énoncé]
La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right).$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p}\right).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1}+\cdots+1+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)$$

donc

$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}>0.$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4n^2}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}.$$

On en déduit que la familles des $1/(n^2-p^2)$ avec $(p,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, $p\neq n$ n'est pas sommable.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) *On peut exprimer u_n en fonction de v_n et v_{n-1}.*

Puisque nv_n correspond à la somme $u_1+\cdots+u_n$, on remarque

$$u_n=nv_n-(n-1)v_{n-1}\quad\text{pour } n\geq 2$$

La différence des membres de l'inégalité étudiée s'écrit alors

$$\begin{aligned}(n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2-2u_nv_n&=(n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2-2nv_n^2+2(n-1)v_nv_{n-1}\\&=(1-n)v_n^2+2(n-1)v_nv_{n-1}+(1-n)v_{n-1}^2\\&=(1-n)(v_n-v_{n-1})^2\leq 0\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité voulue.

(b) Soit $n\geq 2$. On peut écrire

$$(n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2=v_n^2+nv_n^2-(n-1)v_{n-1}^2$$

ce qui fait apparaître v_n^2 et un terme télescopique. En sommant ces termes pour n allant de 2 jusqu'à un entier N, on obtient

$$\sum_{n=2}^{N}v_n^2+Nv_N^2-v_1^2\leq 2\sum_{n=2}^{N}u_nv_n$$

En ajoutant $2v_1^2$ dans chaque membre et en remarquant $u_1=v_1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2+Nv_N^2\leq 2\sum_{n=1}^{N}u_nv_n$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leq 2\sum_{n=1}^{N}u_nv_n$$

On majore la somme en second membre en séparant les facteurs u_n et v_n grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leq 2\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}$$

Que la somme en premier membre soit nulle ou non, on obtient

$$\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\sum_{n=1}^{N} u_n^2\right)^{1/2}$$

Enfin, on élève au carré pour écrire

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N} u_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

On en déduit que la série de terme général v_n^2 car il s'agit d'une série à termes positifs aux sommes partielles majorées. Au surplus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer les termes u_n positifs (ou simplement mener l'étude avec $|u_n|$ au lieu de u_n). Soit $N \geq 2$.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\frac{u_m u_n}{m+n}$$

On échange les deux sommes du deuxième terme

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{u_m u_n}{m+n}$$

On exploite l'inégalité $m+n \geq n$ pour majorer le premier terme et faire apparaître v_n et l'inégalité $m+n \geq m$ pour le second terme en faisant apparaître v_m quitte à adjoindre un terme positif à la somme :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_m u_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{u_m u_n}{n} + \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{u_m u_n}{m}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} u_n v_n + \sum_{m=2}^{N} u_m v_m \leq 2\sum_{n=1}^{N} u_n v_n$$

L'inégalité $2ab \leq a^2+b^2$ complète l'étude

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_m u_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{N}(u_n^2+v_n^2) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$$

Finalement, la famille étudiée est sommable car les sommes partielles sur les parties finies sont majorées.

Exercice 23 : [énoncé]
Par produit de Cauchy de série convergeant absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) On a

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \times \frac{1}{2^{n-k}}.$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$|v_n| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k |u_k|}{2^n} + \varepsilon\sum_{k=N}^{n}\frac{2^k}{2^n} \leq \frac{C^{te}}{2^n} + 2\varepsilon$$

puis pour n assez grand

$$|v_n| \leq 3\varepsilon.$$

On peut donc affirmer que la suite (v_n) converge vers 0.

(c) En permutant les sommes

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{n=k}^{N}\frac{1}{2^{n-k}}.$$

En évaluant la somme géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = 2\sum_{k=0}^{N} u_k\left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right) = 2\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{N}\frac{u_k}{2^{N-k}}$$

et compte tenu du résultat de la question précédente

$$\sum_{n=0}^{N} v_n \to 2\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On en déduit à nouveau que la série $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 25 : [énoncé]
Par produit de Cauchy de séries convergeant absolument

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Il reste à montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ce qui se fait par

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Exercice 26 : [énoncé]
On peut écrire

$$v_n = \sum_{k=0}^{n}\left(u_k \times \frac{1}{2^{n-k}}\right).$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Les termes de la somme définissant u_n sont positifs et celui d'indice 1 vaut $1/(n-1)^\alpha$ et donc

$$u_n \geq \frac{1}{(n-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de la série de terme général u_n pour tout $\alpha \leq 1$.
Pour $\alpha > 1$, on sait la convergence absolue de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$. On réalise alors un produit de Cauchy de cette série par elle-même en considérant

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } a_0 = 0.$$

La série produit de Cauchy a alors pour terme général

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} = u_n.$$

On peut donc affirmer la convergence absolue de la série de terme général u_n pour $\alpha > 1$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, la convergence de la série définissant $f(0)$ est immédiate.
Pour $x \neq 0$, la convergence (absolue) de la série définissant $f(x)$ découle de la règle de d'Alembert

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

(b) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

On fait apparaître un terme $1/n!$ et un coefficient du binôme pour conclure :

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = f(x+y) \end{aligned}$$