Planche n° 13. Espaces euclidiens. Corrigé

Exercice n° 1

1) Soit φ une forme linéaire sur E.

Unicité. Soit $(u,v) \in E^2$ tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = u|x = v|x$. Alors, $\forall x \in E$, $(u-v)|x = 0$ puis $u-v \in E^\perp = \{0\}$ et finalement $u = v$.

Existence. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Posons $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i$. Pour tout $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \\ &= u|x \text{ (car la base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée).}\end{aligned}$$

On a montré qu'il existe un vecteur u et un seul tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = u|x$.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Soit $y \in E$ fixé. Par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire, l'application $\varphi\ :\ x \mapsto f(x)|y$ est une forme linéaire sur E. D'après la question 1), il existe un et un seul vecteur, indépendant de x mais dépendant de y et que l'on note donc $f^*(y)$, tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = x|f^*(y)$. On a ainsi défini une application f^* de E dans E telle que $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x)|y = x|f^*(y)$. De plus, f^* est unique.

b) Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ puis $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur y de E,

$$\begin{aligned}f^*(\lambda x_1 + \mu x_2)|y &= (\lambda x_1 + \mu x_2)|f(y) = \lambda(x_1|f(y)) + \mu(x_2|f(y)) = \lambda(f^*(x_1)|y) + \mu(f^*(x_2)|y) \\ &= (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)|y).\end{aligned}$$

Par suite, $\forall y \in E$, $(f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)))|y = 0$ et donc $f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)) \in E^\perp = \{0\}$ puis $f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)$.

On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)$. Donc $f^* \in \mathscr{L}(E)$.

c) Soit $\mathbb{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et $A^* = \left(a^*_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de f^* dans la base $\mathscr{B}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}a^*_{i,j} &= e_i|f^*(e_j) \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)} \\ &= f(e_i)|e_j \text{ (par définition de } f^*) \\ &= a_{j,i} \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée).}\end{aligned}$$

Donc, $A^* = {}^tA$.

Exercice n° 2

1) Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. D'après le théorème spectral, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.

a) • Supposons f positif ou encore supposons que $\forall x \in E$, $f(x)|x \geqslant 0$. Soit λ une valeur propre de f. Soit x_0 un vecteur propre de f associé à λ.

$$\lambda(x_0|x_0) = (\lambda x_0|x_0) = (f(x_0)|x_0).$$

Puisque $x_0 \neq 0$, on a $(x_0|x_0) = \|x_0\|^2 > 0$ et donc

$$\lambda = \frac{(f(x_0)|x_0)}{(x_0|x_0)} \geqslant 0.$$

On a montré que les valeurs propres de f sont des réels positifs.

• Posons $\mathrm{Sp}(f) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (où $n = \dim(E)$). Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.

D'après le théorème spectral, f est diagonalisable en base orthonormée. Soit donc $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$f(x)|x = \left(\sum_{i}^{n} x_i f(e_i)\right) | \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \left(\sum_{i}^{n} \lambda_i x_i f e_i\right) | \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0.$$

Ceci montre que f est un endomorphisme symétrique positif.

b) • Supposons f défini positif ou encore supposons que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x)|x > 0$. Avec les notations de la question précédente, on a $\lambda = \dfrac{(f(x_0)|x_0)}{(x_0|x_0)} > 0$. Les valeurs propres de f sont donc strictement positives.

• Avec les notations de la question précédente, supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \setminus \{0\}$. On sait déjà que $f(x)|x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$. De plus, $x \neq 0$ et il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. On a alors

$$f(x)|x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_{i_0} x_{i_0}^2 > 0.$$

Ceci montre que f est défini positif.

2) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

a) • Supposons A positive ou encore supposons que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$. Soit λ une valeur propre de A. Soit X_0 un vecteur propre de A associé à λ.

$$\lambda \left({}^tX_0X_0\right) = {}^tX_0 (\lambda X_0) = {}^tX_0AX_0.$$

Puisque $X_0 \neq 0$, on a ${}^tX_0X_0 = \|X_0\|^2 > 0$ et donc

$$\lambda = \frac{{}^tX_0AX_0}{({}^tX_0X_0)} \geqslant 0.$$

On a montré que les valeurs propres de A sont des réels positifs.

• Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
D'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. Soit donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X' = {}^tPX$ de sorte que $X = PX'$.

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t\left({}^tPX\right) D \left({}^tPX\right) = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0.$$

Ceci montre que A est une matrice symétrique positive.

b) • Supposons A définie positive ou encore supposons que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$. Avec les notations de la question précédente, on a $\lambda = \dfrac{{}^tX_0AX_0}{({}^tX_0X_0)} > 0$. Les valeurs propres de f sont donc strictement positives.

• Avec les notations de la question précédente, supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On sait déjà que ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0$. De plus, $X \neq 0$ et il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. On a alors

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_{i_0} x_{i_0}^2 > 0.$$

Ceci montre que A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice n° 3

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
{}^t XH_nX &= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{i+j-1}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jt^{i+j-2}\right)dt\\
&= \int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n} x_it^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iY^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul. Puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_it^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0, 1]$ et on en déduit que

$$
{}^t XH_nX = \int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n} x_it^{i-1}\right)^2 dt > 0.
$$

On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t XH_nX > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Exercice n° 4

On notera $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1) ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.
Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$) et on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$
S = PD{}^tP = PD'D'{}^tP = {}^t(D'{}^tP)\,(D'{}^tP),
$$

et la matrice $A = D'{}^tP$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ S = {}^tAA.}$$

On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.

3)

$$
\begin{aligned}
S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0\\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

4) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$
X \in \text{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}S,
$$

et

$$
X \in \text{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}A.
$$

Ainsi, $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A).}$$

5) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 {}^t P_0$.
Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 {}^t P_0$.
La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 {}^t P_0 = P_0 D_0 {}^t P_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.
M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \text{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.
Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.
Ainsi, nécessairement la matrice ${}^t P_0 M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Exercice n° 5

1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ est libre.
Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.
Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif.
On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = -\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) \left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j \, (x_i | x_j) \leqslant 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J,\ (x_i | x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\displaystyle\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i \, (x_i | x_p) < 0$.

On a montré que la famille $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p - 1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n + 1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \text{dim} E_n \geqslant 1$ que tout famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$.

• Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.
Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle de E_{n+1}.
Si $p = 1$ alors $p \leqslant n + 2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.
On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p - 1$ d'un espace euclidien de dimension n.
Soit $F = x_p^\perp$. Puisque la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n.
On note y_1, y_2,..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ... , x_{p-1} sur F. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i | x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i | y_j) = (x_i | x_j) - 2 \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)\,\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i | x_j) - \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1\leqslant n+1$ et donc $p\leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 6

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.
Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on peut considérer $\mathscr{B}_0=(e_1,...,e_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de la famille $(x_1,...,x_n)$. Les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}
|\det_B(x_1,...,x_n)| = |\det_{B_0}(x_1,...,x_n)| &= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n)\end{vmatrix}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}|(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\
&= \prod_{k=1}^{n}\|x_k\|.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ |\det_B(x_1,...,x_n)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\|x_k\| \text{ (inégalité de Hadamard).}}$$

Ensuite,
- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|(x_k|e_k)|=\|x_k\|\|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k\in[\![1,n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de Hadamard est une égalité si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

Exercice n° 7

C'est le n° 6.

Exercice n° 8

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\right| &= \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}1\times a_{i,j}\times 1\right| = \left|{}^tUAU\right| = |(AU|U)|\\
&\leqslant \|AU\|\|U\| \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\
&= \|U\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)}\\
&= n.
\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (U,AU) est liée ce qui équivaut à U vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\right| = n \Leftrightarrow AU=U \text{ ou } AU=-U \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right|=1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0,1]$,

$$1=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\geqslant\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2=1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Exercice n° 9

Le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

1) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A,B) \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

2) Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathscr{A}_3(R)) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 1.$$

Exercice n° 10

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels positifs (d'après l'exercice n° 2). De plus,

$$\det A = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n),$$

(car si $P = X+1$, on sait que $\mathrm{Sp}(A+I_n) = \mathrm{Sp}(P(A)) = (P(\lambda_1),\ldots,P(\lambda_n)) = (1+\lambda_1,\ldots,1+\lambda_n)$). L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.
Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \dots + \ln(\lambda_n))\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1))) + \dots + \ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+\dots+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}.}$$

Exercice n° 11

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Exercice n° 12

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A{}^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \text{Diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1D{}^tP_1$ et $S_2 = P_2D{}^tP_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1S_1P_1){}^tP_2 = (P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice $P_2{}^tP_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{les matrices } {}^tAA \text{ et } A{}^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Exercice n° 13

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice n° 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM{}^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N\,({}^tMM{}^tN) = {}^t(M{}^tN)M{}^tN$. D'après le n° 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}))^2,\ \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Exercice n° 14

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives (voir exercices n° 2 et 5).

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.
D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(R), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.
La matrice $A + B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A + B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A + B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.
D'après l'exercice n° 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM\left(I_n + {}^t\left(M^{-1}\right)BM^{-1}\right)M$ et donc

$$\det(A + B) = (\det M)^2 \det\left(I_n + {}^t\left(M^{-1}\right)BM^{-1}\right) = (\det M)^2 \det\left(I_n + C\right)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$${}^tXCX = {}^tX{}^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0$$

et ses valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1+\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1\dots\lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1+\det C) \leqslant (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A+B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2,\ \det A + \det B \leqslant \det(A+B).}$$

Exercice n° 15

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i+e_j)|(e_i-e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.
Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E ou encore l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ conserve la norme.

Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 16

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i,j) = ((1,-1,0,0),(1,0,2,-3))$. On orthonormalise la base (i,j).
On prend $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ puis $e_2' = j-(j|e_1)e_1 = (1,0,2,-3)-\dfrac{1}{2}(1,-1,0,0) = \dfrac{1}{2}(1,1,4,-6)$ puis $e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

$$\text{Une base orthonormée de } P \text{ est } (e_1,e_2) \text{ où } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0) \text{ et } e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6).$$

1) Le projeté orthogonal de $u = (x,y,z,t)$ sur P est

$$\begin{aligned}
p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6)\\
&= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t).
\end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3\\ -13 & 14 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 8 & -12\\ -3 & -3 & -12 & 18\end{pmatrix}.}$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6\\ -26 & 1 & 4 & -6\\ 4 & 4 & -11 & -24\\ -6 & -6 & -24 & 9\end{pmatrix}.}$$

2) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}
\|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y+19z+12t, 3x+3y+12z+9t)\|\\
&= \frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2 + (13x+14y-2z+3t)^2 + (-2x-2y+19z+12t)^2 + (3x+3y+12z+9t)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 17

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ soit orthogonale.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda)+\lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(1-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$