Planche n° 5. Convexité. Corrigé

Exercice n° 1

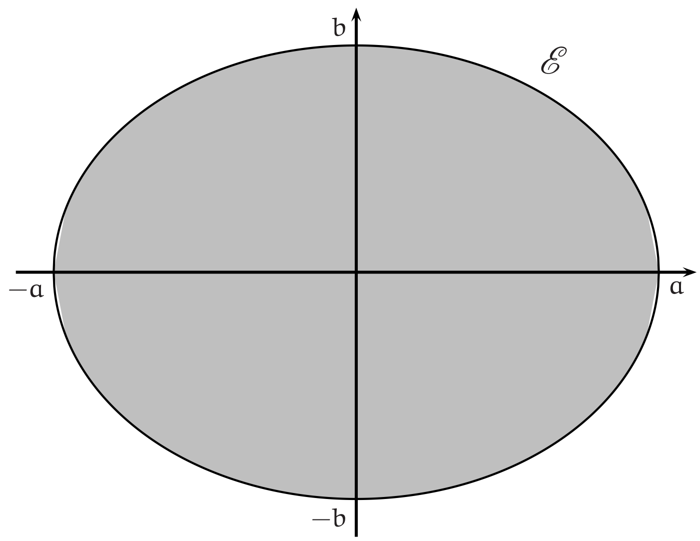
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tous réels α et β et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$,

$$((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)^2 \leqslant (1-\lambda)\alpha^2 + \lambda\beta^2.$$

Soient $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\frac{((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2}{a^2} + \frac{((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)^2}{b^2} &\leqslant \frac{(1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2}{a^2} + \frac{(1-\lambda)y_1^2 + \lambda y_2^2}{b^2} \\
&= (1-\lambda)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) + \lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) \\
&\leqslant (1-\lambda) + \lambda \text{ (car } 1-\lambda \geqslant 0 \text{ et } \lambda \geqslant 0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On a montré que pour tous $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \in \mathscr{E}$. Donc, $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice n° 2

Soient $(x, y) \in B^2$ puis $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
N((1-\lambda)x + \lambda y) &\leqslant N((1-\lambda)x) + N(\lambda y) = |1-\lambda|\,N(x) + |\lambda| N(y) = (1-\lambda)N(x) + \lambda N(y) \\
&\leqslant (1-\lambda) + \lambda \text{ (car } 1-\lambda \geqslant 0 \text{ et } \lambda \geqslant 0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $(x, y) \in B^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in B$ et on a donc montré que B est un convexe de E.

Exercice n° 3

1) Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$.

- $m = \dfrac{x+y}{2} \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$. Donc, $m \leqslant y$.
- $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2} \geqslant 0$. Donc, $g \leqslant m \leqslant y$.
- $g = \sqrt{xy} \geqslant \sqrt{x \times x} = x$. Donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

$\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ avec $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$. D'après ce qui précède, $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{g} = \sqrt{\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et donc $x \leqslant h \leqslant g \leqslant y$ et finalement

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y.$$

2) Soient $x_1, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs où $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$, est strictement négative sur $]0, +\infty[$.
On en déduit que $\dfrac{1}{n}\ln(x_1) + \ldots + \dfrac{1}{n}\ln(x_n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n}x_1 + \ldots + \dfrac{1}{n}x_n\right)$ ou encore $\ln\left(\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)$ ou enfin $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Exercice n° 4

1) Inégalités de Hölder et de Minkowski.

1ère solution. Soient $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et x et y deux réels positifs. L'inégalité est immédiate quand $x = 0$ ou $y = 0$. Dorénavant, x et y sont strictement positifs. Par concavité de la fonction ln sur $]0, +\infty[$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(x^q) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q\right)$$

et donc $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^q}{q}$par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

2ème solution. Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ puis x et y deux réels positifs. L'inégalité est immédiate quand $y = 0$. Soit $y > 0$ fixé.
Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$. Puisque $p > 1$, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{p-1} - y$.
f admet donc un minimum en $x_0 = y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right) = \frac{y^{p(p-1)}}{p} + \frac{y^{p/(p-1)}}{q} - y^{1/(p-1)}y = y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Finalement, f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.}$$

b) Posons $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$.
Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.
On suppose dorénavant que $A > 0$ et $B > 0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \times \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB}\right) = \frac{1}{pA}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \frac{1}{qB}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = \frac{1}{pA} \times A + \frac{1}{qB} \times B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| \leqslant A^{1/p}B^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|$, on a montré que

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Inégalité de Hölder).}}$$

Remarque. Quand $p = q = 2$, on a bien $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

c) Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p &= \sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Si $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.

Sinon $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p>0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\ \text{(Inégalité de Minkowski).}}$$

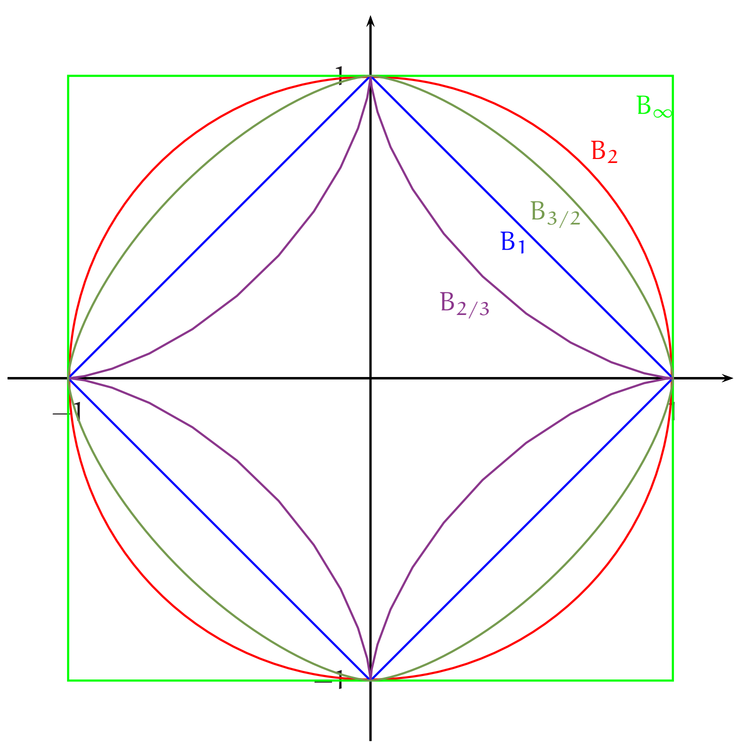
2) a) Soit $\alpha>1$.

(1) N_α est bien une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
(2) Soit $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x)=0\Rightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ |x_k|^\alpha=0\Rightarrow x=0$.
(3) Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}=(|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha}N_\alpha(x)=|\lambda|N_\alpha(x)$.
(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minkowski.

Donc, N_α est une norme de $\mathbb{R}^n$. La démonstration est analogue pour $\alpha=1$ et donc

$$\boxed{\forall\alpha\geqslant1,\ N_\alpha\text{ est une norme sur }\mathbb{R}^n.}$$

b) Quelques « boules unités » dans $\mathbb{R}^2$ ($B_\alpha=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ N_\alpha((x,y))\leqslant1\right\}$).



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E,\ N(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow N(-x) \leqslant 1.$$

c) Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leqslant N_\alpha(x) \leqslant n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

d) oient $\alpha \in]0,1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ N_\alpha(x) \leqslant 1\}$. Les vecteurs $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (0,1,0,\dots,0)$ sont des éléments de B. Le milieu du segment $[xy]$ est $z = \dfrac{1}{2}(1,1,0,\dots,0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice n° 2.

On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Exercice n° 5

1) Les matrices I_n et $-I_n$ sont deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$. Mais $\dfrac{1}{2}I_n + \dfrac{1}{2}(-I_n) = 0_n$ n'est pas un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices stochastiques et soit $\lambda \in [0,1]$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(1-\lambda)A + \mu B$ est $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \geqslant 0$, $b_{i,j} \geqslant 0$ et on a aussi $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$. Donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$.

• Puisque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \geqslant 1$ et $b_{i,j} \geqslant 0$ et que $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
on a $(1-\lambda)a_{i,j} \leqslant 1-\lambda$ et $\lambda b_{i,j} \leqslant \lambda$ puis $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \leqslant 1-\lambda+\lambda = 1$.

• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}\right) = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1-\lambda+\lambda = 1.$$

On a montré que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres réelles simples et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres réelles simples et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

La matrice $C = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet 1 pour valeur propre double. Si C était diagonalisable dans $\mathbb{R}$, C serait semblable à I_2 et donc égale à I_2 ce qui n'est pas. Donc, $C = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On a montré que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 6

1) La fonction exponentielle est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Son graphe est au-dessus de sa tangente en le point $(0,1)$ et même strictement au-dessus à part en son point de contact. Donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$ et même

$$\forall x \neq 0,\ e^x > 1 + x.$$

2) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir $t \mapsto -\dfrac{1}{(1+t)^2}$ est négative sur cet intervalle. Son graphe est au-dessous de sa tangente en $(0,0$ sur $]-1,+\infty[$ et donc,

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

3) La fonction $t \mapsto \sin t$ est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée seconde, à savoir $t \mapsto -\sin t$ est négative sur cet intervalle. Sur cet intervalle, son graphe est au-dessus de sa tangente en $(0,0)$ et au-dessus de la corde joignant les points $(0,0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$. On en déduit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x.$$