Résumé de sup : Bernoulli

1) Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si et seulement si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=1) = p$ (et $P(X=0) = 1-p$). (Remarque. $X^2 = X$.)

Théorème. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Démonstration. $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ et $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = E(X) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

2) Loi binomiale

Définition. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathscr{B}(n,p)$, si et seulement si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Théorème. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration directe.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np\sum_{l=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1} p^{l}(1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k(1-p)^{n-k} = np + n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\
&= np + n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} = np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

puis

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

3) La loi binomiale comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes

Théorème. • Si X et Y sont deux variables indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p), alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n+m,p)$.

• Si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n_i,p), $1 \leqslant i \leqslant k$, alors $X_1 + \ldots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p) où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

• Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration.

• Soit $Z = X+Y$. $Z(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$. Puisque X et Y sont indépendantes, pour tout $k \in [\![0,n+m]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(Z=k) = P(X+Y=k) &= \sum_{(i,j)[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)} = p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.
\end{aligned}$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ est le coefficient de X^k dans le développement de $(1+X)^n\times(1+X)^m=\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^i\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}X^j\right)$.

Puisque $(1+X)^n\times(1+X)^m=(1+X)^{n+m}$, ce coefficient est aussi $\dbinom{n+m}{k}$. Donc,

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}\ \text{(relation de V}\textsc{andermonde}\text{)}.$$

Mais alors, $P(Z=k)=\dbinom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}$. Ceci montre que Z suit la loi $\mathscr{B}(n+m,p)$.

• Le deuxième résultat se montre par récurrence sur k et puisque X_1, ..., X_{k+1} indépendantes $\Rightarrow$ X_{k+1} et $X_1+\ldots+X_k$ indépendantes.

• Le troisième résultat est le cas particulier $\forall i$, $n_i=1$. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}n_i=n$.

Théorème. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$.

Démonstration. Soient X_1, ..., X_n n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1,p)$. D'après ce qui précède, $X_1+\ldots+X_n=X$.

Par linéarité de l'espérance, $E(X)=E(X_1)+\ldots+E(X_n)=p+\ldots+p=np$.

Puisque les variables X_1, ..., X_n, sont indépendantes, les variables X_1, ..., X_n, sont deux à deux indépendantes. On en déduit que $V(X)=V(X_1)+\ldots+V(X_n)=p(1-p)+\ldots+p(1-p)=np(1-p)$.