Devoirs $\mathbb{MPSI}_2$

R. Mansuy

2011-2012

Problème – Application différence

Notons, pour tout entier $d \geq 2$,

$$\delta_d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{Z}^d \\ (x_1, x_2, \ldots, x_d) & \mapsto & (|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, \ldots, |x_d - x_1|) \end{array} \right.$$

Pour toute application $f; \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$, notons $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ la k-ème composée de f. Par exemple, $\delta_d^0 = \mathrm{Id}$, $\delta_d^1 = \delta_d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_d^{n+1} = \delta_d \circ \delta_d^n = \delta_d^n \circ \delta_d$.

Partie A – Généralités

1. Déterminer tous les $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\delta_d(x) = (0, 0, \ldots, 0)$.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_3^n(1, 0, 0)$ et $\delta_4^n(1, 0, 0, 0)$.
3. (a) Comparer, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\delta_d(\alpha x)$ et $\delta_d(x)$.
   (b) Soit $\sigma_d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{Z}^d \\ (x_1, x_2, \ldots, x_d) & \mapsto & (x_2, \ldots, x_d, x_1) \end{array} \right.$
   Comparer, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma_d \circ \delta_d(x)$ et $\delta_d \circ \sigma_d(x)$.
4. Notons, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq d} |x_k|$.
   (a) A-t-on pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\|\delta_d(x)\| \leq \|x\|$?
   (b) A-t-on pour tout $x \in \mathbb{N}^d$, $\|\delta_d(x)\| \leq \|x\|$?
   (c) Trouver $x \in \mathbb{N}^d$ non constant tel que $\|\delta_d(x)\| = \|x\|$.

L'objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur d pour que

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \delta_d^n(x) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Partie B – Cas où d est impair

Dans cette partie, on suppose que d est impair.

1. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\delta_d(x) = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d \in \{\pm 1\}$ tels que
   $$\varepsilon_1 \alpha = x_2 - x_1,\ \varepsilon_2 \alpha = x_3 - x_2, \ldots,\ \varepsilon_d \alpha = x_1 - x_d.$$
   (b) En déduire que $\alpha = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et $n \geq 2$ tels que $\delta_d^n(x) = (0, 0, \ldots, 0)$ et on pose $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) = \delta_d^{n-1}(x)$.
   (a) Justifier que $y_1 = y_2 = \ldots = y_d$.
   (b) Déterminer les valeurs possibles pour x.
3. Conclure.

Partie C – Cas où d admet un diviseur impair

Dans cette partie, on suppose que $d = ab$ avec a impair.

1. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_a)$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_a^n(x) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\delta_d^n(x_1, x_2, \ldots, x_a, x_1, x_2, \ldots, x_a, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_a) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$
2. Conclure.

Partie D – Cas où d est une puissance de 2

Dans cette partie, on suppose que $d = 2^m$.
On note $(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (y_1, y_2, \ldots, y_d)[2]$ si, pour tout $i \leq d$, $x_i = y_i[2]$ (c'est-à-dire si chaque coordonnée de x à la même parité que la coordonnée correspondante de y).

1. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$.
   (a) Vérifier, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que
   $$(\mathrm{Id} - \sigma_d)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \sigma_d^i.$$
   (b) Montrer que
   $$(\mathrm{Id} - \sigma_d)^d(x) = (0, 0, \ldots, 0)[2].$$
   (c) Montrer que les coordonnées de $\delta_d^d(x)$ sont toutes paires.
   (d) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $x' \in \mathbb{N}^d$ tel que
   $$\delta_d^{dm}(x) = 2^m x'.$$
2. Soit $x \in \mathbb{N}^d$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|x\| < 2^p$. Soit $x' \in \mathbb{N}^d$ tel que
   $$\delta_d^{dp}(x) = 2^p x'.$$
   (a) Vérifier que si $x' \neq (0, 0, \ldots, 0)$, alors $\|\delta_d^{dp}(x)\| \geq 2^p$.
   (b) Conclure.

↷

Problème I – Anneaux de Boole

Un anneau de Boole est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$ tel que

(i) $\oplus$ est associative, commutative, admet un élément neutre, noté 0_A et telle que tout élément de A admet un symétrique pour $\oplus$

(ii) $\otimes$ est associative et admet un élément neutre distinct de 0_A, noté 1_A.

(iii) $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

(iv) $\forall x \in A, \qquad x \otimes x = x$.

Partie A – Anneau de Boole à deux éléments

Munissons l'ensemble $B = \{0, 1\}$ des lois $+$ et $\times$ définies par les tables suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Vérifier que $(B, +, \times)$ est un anneau de Boole.
Peut-on construire un anneau de Boole à deux éléments distinct de celui-ci ?

Partie B – Différence symétrique et réunion

Soit E un ensemble non-vide. On rappelle que la différence symétrique de deux parties A et B de E est définie par $A\Delta B = (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement})$.

1. Vérifier rapidement que Δ est commutative. Est ce que Δ admet un élément neutre ?
2. Montrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$,
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^{\complement}.$$
3. Montrer que $\cap$ est distributive sur Δ.
4. Conclure que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
On admettra les propriétés d'associativité.

Partie C – Propriétés générales d'un anneau de Boole

Considérons un anneau de Boole $(A, \oplus, \otimes)$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in A$, $x \otimes 0_A = 0_A$ et $x \oplus x = 0_A$.
   (b) Déterminer le symétrique des éléments de A pour $\oplus$.
   (c) En déduire que la loi $\otimes$ est commutative.
2. (a) Simplifier l'expression $x \otimes y \otimes (x \oplus y)$ pour tout $x, y \in A$.
   (b) En déduire que si $A \neq \{0_A, 1_A\}$, alors il existe x et y différents de 0_A tels que $x \otimes y = 0_A$.
3. Considérons la relation binaire $\prec$ sur A définie par $x \prec y$ si et seulement si $x = x \otimes y$.
   (a) Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre.
   (b) Montrer que, pour tout $x, y \in A$, $\sup\{x, y\} = x \otimes y \oplus x \oplus y$ puis déterminer $\inf\{x, y\}$ à l'aide des lois $\oplus$ et $\otimes$.

Problème II – Théorème de Cantor Bernstein

Soit E et F deux ensembles non vides tels qu'il existe une injection f de E dans F, et une injection g de F sur E.
Posons $h = g \circ f$ et considérons les ensembles

$$\begin{cases} A &= h(E)\,, \\ B &= g(F) \setminus A\,, \\ C &= E \setminus (A \cup B)\,, \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} A_i &= h^i(A)\,, \\ B_i &= h^i(B)\,, \\ C_i &= h^i(C)\,. \end{cases}$$

et enfin $A' = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$, $B' = A' \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right)$ et $C' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.

Partie A – Préliminaires

1. Montrer que h est injective.
2. (a) Montrer que, si $B = \varnothing$, alors f est surjective.
   (b) Montrer que, si $C = \varnothing$, alors g est surjective.
   (c) Conclure que si B ou C est l'ensemble vide, alors il existe une bijection entre E et F.

Dans la suite du problème, on suppose que B et C sont non vides.

Partie B – Partitions de E

1. Soit φ une application injective de E dans lui-même. Démontrer que $(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$ est une partition de $\varphi(E)$.
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, démontrer que $(A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1})$ est une partition de A_i.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(A_n, B_0, \ldots, B_n, C_0, \ldots, C_n)$ est une partition de E.
4. Montrer que :

↷

- ▷ si $A' \neq \varnothing$, alors la famille $(A', B_0, \ldots, B_n, \ldots, C_0, \ldots, C_n, \ldots)$ est une partition de E
- ▷ si $A' = \varnothing$, alors la famille $(B_0, \ldots, B_n, \ldots, C_0, \ldots, C_n, \ldots)$ est une partition de E

Partie C – Construction d'une bijection

Définissons l'application ψ définie par $\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in B', \\ h(x) & \text{si } x \in C'. \end{cases}$

1. Vérifier que ψ est une application de E dans E.
2. Démontrer que $\psi(E) = A \cup B$, puis que la corestriction de ψ à $A \cup B$ est une bijection.
3. Soit $x \in E$. Montrer que $\psi(x)$ admet un unique antécédent par g, que l'on notera $\theta(x)$.
4. Montrer que θ est une bijection de E dans F.

Problème – Homographies de $\mathbb{U}$

Dans ce problème, une homographie de $\mathbb{U}$ est une application $h : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad h(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $|c| \neq |d|$ et $ad - bc \neq 0$.
Une homographie h de $\mathbb{U}$ vérifiant $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ est involutive si

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad h \circ h(z) = z.$$

Partie A – Exemples

1. Considérons l'homographie $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z-1}{z} \end{array} \right.$
   (a) L'homographie h est-elle injective ? surjective ?
   (b) Déterminer $h(\mathbb{U}_n)$ et $h^{-1}(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer l'ensemble $F \subset \mathbb{C}$ tel que l'homographie $\widetilde{h} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & F \\ z & \mapsto & \frac{z-1}{z} \end{array} \right.$ soit bijective et préciser la bijection réciproque.
2. Déterminer les homographies de $\mathbb{U}$ qui admettent trois points fixes distincts.

Partie B – Groupe de Moebius

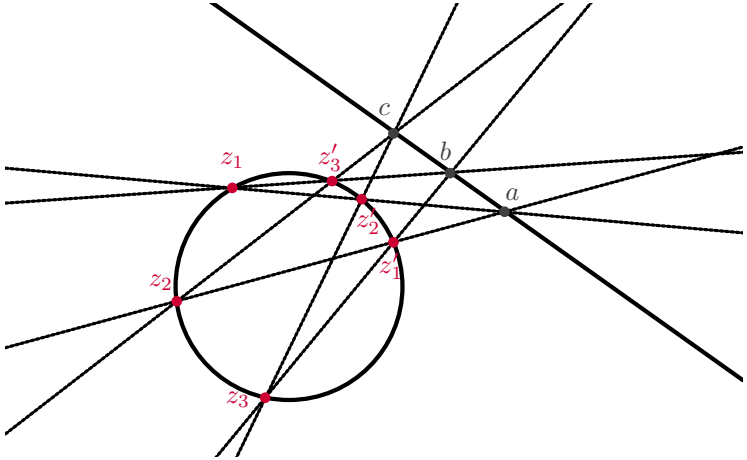
1. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $z \neq 0$ et $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. Considérons l'application h définie par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ telle que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$ avec $A = \overline{a}b - \overline{c}d$ et $B = |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2$.
   (b) Préciser la nature de l'ensemble d'équation $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$ puis que $A = B = 0$.
   (c) Montrer que, si $a = 0$, alors $d = 0$ et $|b| = |c| \neq 0$.
   En déduire qu'il existe un complexe β tel que, pour tout $z \in \mathbb{U}$,
   $$h(z) = \frac{\beta}{\overline{\beta}z}.$$
   (d) Montrer que, si $a \neq 0$, alors $|a| = |d| \neq |b| = |c|$.
   Indication: on pourra remarquer que $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}}$.
   En déduire qu'il existe des complexes α, β tels que, pour tout $z \in \mathbb{U}$,
   $$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}}.$$
3. Réciproquement, montrer qu'une homographie h définie par $h(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ vérifie $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
4. Montrer que les corestrictions à $\mathbb{U}$ des homographies h telles que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ forment un groupe pour la composition, appelé groupe de Moebius.
5. Montrer que l'homographie définie par $h(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ est involutive si et seulement si elle est $\pm\mathrm{Id}$ ou si $\alpha + \overline{\alpha} = 0$.

Partie C – Involutions de Frégier de $\mathbb{U}$

Pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, l'involution de Frégier de centre a est l'application I_a qui à $z \in \mathbb{U}$ associe $I_a(z) \in \mathbb{U}$ (différent de z si c'est possible) tel que les points d'affixe a, z et $I_a(z)$ soient alignés.

1. Justifier rapidement qu'une involution de Frégier est effectivement une involution.
2. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Déterminer l'expression de $I_a(z)$ pour $z \in \mathbb{U}$.
   Est-ce l'expression d'une homographie préservant $\mathbb{U}$?
3. Soit a, b, c trois complexes distincts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On admet que
   $$I_a \circ I_b \circ I_c(z) = \frac{(1 - a\overline{b} - b\overline{c} + a\overline{c})z + (-a + b - c + a\overline{b}c)}{\overline{(-a + b - c + a\overline{b}c)}z - \overline{(1 - a\overline{b} - b\overline{c} + a\overline{c})}}.$$
   Montrer que $I_a \circ I_b \circ I_c$ est une involution si et seulement si les points d'affixes a, b et c sont alignés.
4. Soit $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3'$ des nombres complexes deux à deux distincts de $\mathbb{U}$. Notons a l'intersection des droites passant par les points d'affixe z_1 et z_2' et passant par les points d'affixe z_1' et z_2, b l'intersection des droites passant par les points d'affixe z_1 et z_3' et passant par les points d'affixe z_1' et z_3, c l'intersection des droites passant par les points d'affixe z_2 et z_3' et passant par les points d'affixe z_2' et z_3.
   (a) Soit a' le point d'intersection des droites passant par les points d'affixe z_1 et z_2' et passant par les points d'affixe b et c.
   Justifier que $J = I_{a'} \circ I_b \circ I_c$ est une involution.
   (b) Calculer $J(z_2)$; en déduire $J(z_2')$.
   (c) Conclure que les points d'affixe a, b et c sont alignés.

↷


c
b
a
z_1
z_3'
z_2'
z_1'
z_2
z_3

Problème 1 – Géométrie du triangle

Dans tout ce problème, on assimile un point du plan à son affixe.

Partie A – Calculs sur des droites

1. Soit a et b deux complexes de module 1.
   (a) Vérifier que $a+b-ab\overline{z}$ est le symétrique orthogonal de z par rapport à la droite (ab).
   (b) En déduire que z appartient à la droite (ab) si et seulement si
   $$z = a+b-ab\overline{z}.$$
   (c) Déterminer la projection orthogonale de z sur la droite (ab).
2. Soit a, b, c et d quatre complexes de module 1.
   (a) Montrer que les droites (ab) et (cd) sont parallèles (ou confondues) si et seulement si $ab-cd=0$.
   (b) Supposons $ab-cd \neq 0$. Déterminer le point d'intersection des droites (ab) et (cd).
   (c) Montrer que, pour tous complexes a, b, c, $d \in \mathbb{U}$ tels que $ab-cd \neq 0$ et tels que l'intersection de (ab) et (cd) est un point z_0 fixé, l'intersection de (ac) et (bd) appartient à la droite d'équation
   $$z\overline{z_0} + \overline{z}z_0 = 2.$$
   Justifier qu'alors, le point d'intersection de (ad) et (bc) y appartient aussi.
3. Soit a, b, c et d quatre complexes de module 1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (ab) et (cd) soient perpendiculaires.

Partie B – Cercle circonscrit et triangle orthique

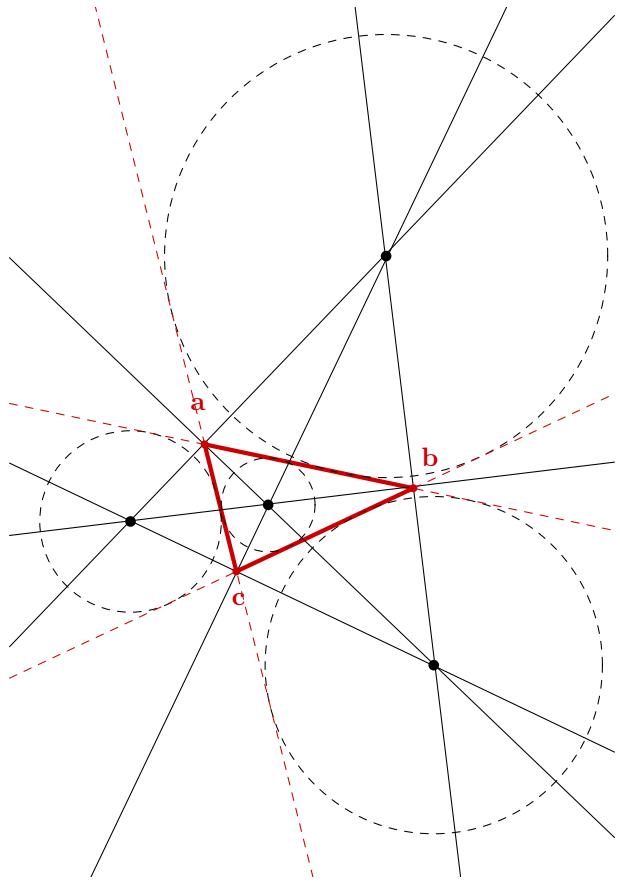
Soit a, b, c trois complexes de module 1, u, v et w des complexes tels que
$$a = u^2,\ b = v^2,\ c = w^2.$$

1. Déterminer l'équation de la droite T_a tangente en a au cercle circonscrit au triangle abc.
2. Préciser l'intersection a_1 de T_b et T_c.
3. Déterminer a_2 le pied de la hauteur issue de a.
   On définit de même b_1, b_2, c_1 et c_2.
4. Vérifier que les droites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont concourantes.
5. Le point de concours précédent appartient-il à la droite d'Euler (qui, rappelons-le, passe par le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit du triangle) ?

Partie C – Cercles inscrits et exinscrits

On rappelle que deux droites distinctes et sécantes admettent deux droites bissectrices perpendiculaires entre elles.
Soit a, b, c trois complexes de module 1, u, v et w des complexes tels que
$$a = u^2,\ b = v^2,\ c = w^2.$$

En traçant les bissectrices des droites qui soutiennent les côtés du triangle abc, on obtient quatre points d'intersection de trois d'entre elles (différents des sommets) : le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits. *Aucune connaissance de ces cercles n'est requise pour ce devoir.*



Montrer que les points $\varepsilon_1 uv + \varepsilon_2 vw + \varepsilon_3 wu$ avec
$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \in \{\pm 1\} \text{ et } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$$
sont les intersections des bissectrices.

↷

Problème 2 – Anneau d'Eisenstein

Dans ce problème, l'anneau d'Eisenstein est l'ensemble

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + jb,\ a, b \in \mathbb{Z}\},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Partie A – Caractère euclidien de $\mathbb{Z}[j]$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par addition, différence, produit.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on note $N(a + jb) = a^2 - ab + b^2$.
   (a) Exprimer, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$, $N(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.
   (b) En déduire les $z \in \mathbb{Z}[j]$ tels que $N(z) = 0$.
   (c) Calculer, pour tous z, $z' \in \mathbb{Z}[j]$, $N(zz')$ en fonction de $N(z)$ et $N(z')$.
   (d) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$ non nul. Montrer que $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $N(z) = 1$. Reconnaître l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[j]$ admettant un inverse dans $\mathbb{Z}[j]$.
3. Soit $a + jb$, $c + jd \in \mathbb{Z}[j]$ (avec a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$) tels que $c + jd \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe x, $y \in \mathbb{Q}$ tels que
   $$\frac{a + jb}{c + jd} = x + jy.$$
   Notons $q, r \in \mathbb{Z}$ les entiers les plus proches de x et de y (avec la convention $q \leq x$ si $x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ et $r \leq y$ si $y \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$).
   (b) Montrer que $N((x - q) + j(y - r)) < 1$.
   (c) En déduire une division euclidienne de $a + jb$ par $c + jd$: il existe z $z' \in \mathbb{Z}[j]$ tels que
   $$a + jb = z(c + jd) + z', \qquad \text{et } N(z') < N(c + jd).$$
   (d) Écrire une division de $3 + 4j$ par $1 + 2j$.

Partie B – Idéaux de $\mathbb{Z}[j]$

Un idéal de $\mathbb{Z}[j]$ est une partie $I \subset \mathbb{Z}[j]$ non vide telle que
- ▹ pour tous z, $z' \in I$, $z - z' \in I$;
- ▹ pour tout $z \in I$ et tout $a + jb \in \mathbb{Z}[j]$, $(a + jb)z \in I$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$, la partie (z) définie par
   $$(z) = \{zz',\ z' \in \mathbb{Z}[j]\}$$
   est un idéal de $\mathbb{Z}[j]$.
2. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $I = (z)$.
3. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer que le radical de I défini par
   $$\sqrt{I} = \{z \in \mathbb{Z}[j],\ \exists n \in \mathbb{N},\ z^n \in I\}$$
   est un idéal de $\mathbb{Z}[j]$ contenant I.
4. Déterminer $\sqrt{(z)}$ pour $z = (2 + j)^2(1 - 3j)^3$.

↷

Exercice – Une équation fonctionnelle

Le but de ce problème est de déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
3. Montrer que, si f est solution,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leq f(x) \leq 1.$$

   Indication: on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
5. Montrer que th est solution du problème posé.
6. On suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.
   (b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
   (c) En utilisant les résultats des questions précédentes, aboutir à une contradiction.
   (d) Que peut-on dire si l'hypothèse $f(0) = 1$ est remplacée par l'hypothèse $f(0) = -1$?
   (e) Conclure.
7. On suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.
   (a) En raisonnant par l'absurde et en considérant, comme précédemment, une suite, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \neq 1.$$

   On définit alors la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \operatorname{argth}(f(x)).$$

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(2x) = 2\,g(x).$$

   (c) Montrer que g est dérivable en zéro.
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite $(v_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}.$$

   Montrer que $(v_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
   (e) En déduire que g est linéaire.
8. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Problème – Anneau d'Eisenstein

Dans ce problème, l'anneau d'Eisenstein est l'ensemble

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + jb,\ a, b \in \mathbb{Z}\},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Partie A – Caractère euclidien de $\mathbb{Z}[j]$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par addition, différence, produit.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on note $N(a + jb) = a^2 - ab + b^2$.
   (a) Exprimer, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$, $N(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.
   (b) En déduire les $z \in \mathbb{Z}[j]$ tels que $N(z) = 0$.
   (c) Calculer, pour tous z, $z' \in \mathbb{Z}[j]$, $N(zz')$ en fonction de $N(z)$ et $N(z')$.
   (d) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$ non nul. Montrer que $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $N(z) = 1$. Reconnaître l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[j]$ admettant un inverse dans $\mathbb{Z}[j]$.
3. Soit $a + jb$, $c + jd \in \mathbb{Z}[j]$ (avec a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$) tels que $c + jd \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe x, $y \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\frac{a+jb}{c+jd} = x + jy.$$

   Notons $q, r \in \mathbb{Z}$ les entiers les plus proches de x et de y (avec la convention $q \leq x$ si $x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ et $r \leq y$ si $y \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$).
   (b) Montrer que $N((x - q) + j(y - r)) < 1$.
   (c) En déduire une division euclidienne de $a + jb$ par $c + jd$: il existe z $z' \in \mathbb{Z}[j]$ tels que

$$a + jb = z(c + jd) + z', \qquad \text{et } N(z') < N(c + jd).$$

   (d) Écrire une division de $3 + 4j$ par $1 + 2j$.

↷

Partie B – Idéaux de $\mathbb{Z}[j]$

Un idéal de $\mathbb{Z}[j]$ est une partie $I \subset \mathbb{Z}[j]$ non vide telle que
- ▷ pour tous z, $z' \in I$, $z - z' \in I$;
- ▷ pour tout $z \in I$ et tout $a + jb \in \mathbb{Z}[j]$, $(a + jb)z \in I$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$, la partie (z) définie par
$$(z) = \{zz',\ z' \in \mathbb{Z}[j]\}$$
est un idéal de $\mathbb{Z}[j]$.
2. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $I = (z)$.
3. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer que le radical de I défini par
$$\sqrt{I} = \{z \in \mathbb{Z}[j],\ \exists n \in \mathbb{N},\ z^n \in I\}$$
est un idéal de $\mathbb{Z}[j]$ contenant I.
4. Déterminer $\sqrt{(z)}$ pour $z = (2 + j)^2(1 - 3j)^3$.

Exercice – Caractérisation des équations différentielles linéaires

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Notons (E) l'équation différentielle

$$y' = F(x, y).$$

1. Donner une équation de la droite passant par (x_0, y_0) et de pente $F(x_0, y_0)$.
2. Supposons dans cette question que F est de la forme $F(x, y) = \alpha(x).y + \beta(x)$ avec α et β deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in J$.
   (a) Montrer que, si $\alpha(x_0) = 0$, alors les tangentes au point d'abscisse x_0 aux solutions de (E) sont parallèles.
   (b) Montrer que, si $\alpha(x_0) \neq 0$, alors les tangentes au point d'abscisse x_0 aux solutions de (E) sont concourantes.
3. Dans cette question, supposons seulement que F est telle que :
   ▷ pour tout $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$, il existe une solution de (E) satisfaisant la condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$;
   ▷ les tangentes au point d'abscisse x_0 aux solutions de (E) sont soit toutes parallèles, soit concourantes.
   (a) Pour tous $x_0 \in J$ et $y_0 \neq y_1$, montrer que $\frac{F(x_0,y_0)-F(x_0,y_1)}{y_0-y_1}$ est une quantité qui ne dépend pas du couple (y_0, y_1) et que l'on notera désormais $\alpha(x_0)$.
   (b) En déduire que, si $\alpha(x_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0) - \alpha(x_0)y_0$ ne dépend pas de y_0.
   (c) Conclure que F est linéaire.

Problème – Équations linéaires d'ordre 2

Les parties A,B,C sont indépendantes entre elles.

Partie A – Un exemple

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation

$$(E) : (\mathrm{sh}x)y'' + (2\mathrm{ch}x)y' + (\mathrm{sh}x)y = 0.$$

1. Montrer qu'une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$) si et seulement si $z : x \mapsto y'(x) + \frac{1}{\mathrm{th}x}y(x)$ est solution d'une équation (E') d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$) .
2. Résoudre l'équation (E').
3. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est proportionnelle à $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{sh}x}$.

Partie B – Réduction de l'équation générale

Soit (E) une équation de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ avec a une fonction ne s'annulant pas. Pour toute fonction u deux fois dérivable, définissons z deux fois dérivable telle que $y = uz$.

1. Montrer que si y est solution de (E), alors z est encore solution d'une équation différentielle.
2. En déduire que si u est solution d'une équation (E'') linéaire d'ordre 1 (à préciser), alors z est solution d'une équation (E') de la forme
$$\alpha(x)z'' + \beta(x)z = 0.$$
3. Déterminer les solutions de (E'') puis l'équation (E') correspoindante dans la cas où les fonctions a, b, c sont constantes.

Partie C – Entrelacement des zéros

Soit p, q deux fonctions, y_1 et y_2 des solutions non nulles des équations $y''+p(x)y = 0$ et $y'' + q(x)y = 0$ respectivement.
On admet que les zéros de ces solutions sont isolés, c'est-à-dire que, pour chaque zéro, il existe un intervalle ouvert ne contenant que ce zéro.
Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

1. Donner une expression simple de la dérivée de W.
2. Supposons que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad p(x) \geq q(x).$$
   (a) Soit $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2.
   On admet que $y_2'(x_1)y_2'(x_2) < 0$.
   Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.
   (b) En déduire que si p est minorée par une constante strictement positive ω^2, alors y_1 admet une infinité de zéros (et deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus $\frac{\pi}{\omega}$).
   (c) En déduire aussi que si q est majorée par 0, alors y_2 admet au plus un zéro.
3. Supposons que $p = q$ (donc y_1 et y_2 sont solutions de la même équation différentielle d'ordre 2).
   Montrer que si y_1 et y_2 n'ont pas de zéro commun, alors y_1 admet exactement un zéro entre deux zéros consécutifs de y_2.

↷

Partie D –Équation de Bessel

Soit n le nombre de zéros sur un intervalle de longueur π d'une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{x^2})y = 0.$$

Montrer que si $\lambda \geq \frac{1}{2}$, $n \leq 1$.
Que dire si $\lambda \leq \frac{1}{2}$?

Problème – Équations de Sturm périodiques

Soit q une fonction continue, paire, π-périodique. L'équation de Sturm périodique associée sur l'intervalle I est

$$(E_q) \qquad y'' + qy = 0.$$

On *admet* le théorème suivant :

Théorème 1

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $x_0 \in I$, il existe une unique solution y de (E_q) définie sur I telle que $y(x_0) = a$ et $y'(x_0) = b$.

Notons f_1 et f_2 les solutions de (E_q) définie sur I vérifiant

$$\begin{cases} f_1(0) &= 1 \\ f_1'(0) &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(0) &= 0 \\ f_2'(0) &= 1 \end{cases}$$

Partie A – Généralités

On pensera à utiliser le théorème admis.

1. Montrer que la solution de (E_q) telle que $y(0) = a$ et $y'(0) = b$ est $af_1 + bf_2$.
2. (a) Montrer que si y est solution de (E_q) alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E_q).
   (b) En déduire que f_1 est paire et f_2 est impaire.
   (c) Préciser, en fonction de f_1 et f_2, toutes les solutions paires (respectivement impaires) de (E_q).
3. Supposons dorénavant que f_1 ne s'annule pas sur I et posons $\varphi = \frac{f_2}{f_1}$.
   (a) Montrer que $\varphi' = \frac{1}{f_1^2}$.
   (b) En déduire une expression de f_2 en fonction de f_1 et de la primitive $\tilde{f}_1$ de f_1^{-2} nulle en 0.

Partie B – Un exemple

Posons, dans cette partie, $f : x \mapsto (\cos(x))^2$ et $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Trouver q tel que f soit solution de (E_q).
   Cette valeur est dorénavant fixée.
2. Déterminer la fonction f_1 associée à (E_q).
3. (a) Montrer que
   $$\frac{1}{(\cos(x))^4} = (1 + (\tan(x))^2)\tan'(x).$$
   (b) Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(\cos(x))^4}$.
4. En déduire f_2 puis l'ensemble des solutions de (E_q).

Partie C – Solutions π-périodiques

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{cases} f_1(x+\pi) &= f_1(\pi)f_1(x) &+ f_1'(\pi)f_2(x), \\ f_2(x+\pi) &= f_2(\pi)f_1(x) &+ f_2'(\pi)f_2(x). \end{cases}$$
2. Montrer qu'il existe une solution de (E_q) π-périodique non nulle si et seulement si le système
   $$\begin{cases} (f_1(\pi) - 1)a &+ f_2(\pi)b &= 0, \\ f_1'(\pi)a &+ (f_2'(\pi) - 1)b &= 0. \end{cases}$$
   admet une solution (a, b) non nulle.
3. Montrer que s'il existe une solution de (E_q) π-périodique non nulle, alors f_1 ou f_2 est π-périodique.

Partie D – Alternative de Sturm

Notons λ_1, λ_2 les racines du polynôme

$$X^2 - (f_1(\pi) + f_2'(\pi))X + 1.$$

1. Supposons, dans cette question, que $|f_1(\pi) + f_2'(\pi)| > 2$.
   (a) Montrer qu'il existe deux solutions g_1 et g_2 non nulles de (E_q) telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g_1(x+\pi) = \lambda_1 g_1(x), \qquad g_2(x+\pi) = \lambda_2 g_2(x).$$
   (b) Montrer que g_1 et g_2 ne sont pas proportionnelles et en déduire que toute solution de (E_q) est combinaison linéaire de g_1 et g_2.
   (c) Conclure que toute solution non nulle de (E_q) n'est pas bornée.
2. Montrer que si $|f_1(\pi) + f_2'(\pi)| < 2$, alors toute solution de (E_q) est bornée.

↷

Problème – Faisceau de cercles

Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et Φ_k la fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $M(x, y)$ fait correspondre le réel :

$$\Phi_k(M) = x^2 + y^2 - 2a_k x - 2b_k y + c_k,$$

avec k un entier naturel, a_k, b_k, c_k trois réels.
Considérons les cercles C_k (supposés non vides) donnés par les équations $\Phi_k(M) = 0$ et notons Ω_k le centre de C_k et $R_k \neq 0$ son rayon ; on appelle alors $\Phi_k(M)$ puissance du point M par rapport à C_k.

Partie I – Axe radical de deux cercles

1. Déterminer la puissance d'un point de C_k par rapport à C_k.
2. Préciser Ω_k et R_k en fonction de a_k, b_k et c_k puis exprimer $\Phi_k(M)$ en fonction de $\Omega_k M$ et R_k.
3. Soit C_1 et C_2 de centres distincts. Montrer que l'ensemble des points M qui ont même puissance par rapport à C_1 et C_2 est une droite Δ, appelée axe radical de C_1 et C_2.
4. Donner, pour chaque type de position relative de C_1 et C_2, une construction de Δ.

Partie II – Cercles orthogonaux

Deux cercles C_1 et C_2 sont dits orthogonaux, et on note $C_1 \perp C_2$, si, et seulement si $\Omega_1\Omega_2^2 = R_1^2 + R_2^2$.

1. Montrer que C_1 et C_2 sont orthogonaux si, et seulement si la puissance de Ω_2 par rapport à C_1 est égale à R_2^2.
2. Montrer que si deux cercles sont orthogonaux seulement alors ils sont sécants en deux points distincts et leurs tangentes respectives en chaque point d'intersection sont orthogonales. Est une condition suffisante ?
3. Montrer que $C_1 \perp C_2$ si et seulement si la quantité $\psi(C_1, C_2) = a_1a_2 + b_1b_2 - \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ est nulle.
4. Donner des conditions nécessaires et suffisantes à l'aide de $\psi(C_1, C_2)$, R_1 et R_2 pour que C_1 et C_2 soient sécants ou tangents.
5. Soit C_1 et un point I. À quelle condition nécessaire et suffisante I est-il centre d'un cercle orthogonal à C_1 ? Montrer qu'alors ce cercle est unique et le construire.

Partie III – Faisceaux linéaires de cercles

Soit C_1 et C_2 de centres distincts. Pour tout $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, on considère la courbe $C_{\lambda,\mu}$ d'équation : $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)(M) = 0$.

1. Montrer que $C_{\lambda,\mu}$ est soit l'ensemble vide, soit un point, soit un cercle, soit une droite et dans ce dernier cas, montrer que c'est l'axe radical de C_1 et C_2.
2. On appelle faisceau linéaire de cercles engendré par C_1 et C_2 l'ensemble $\mathcal{F}$ des cercles $C_{\lambda,\mu}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des cercles $C_{\lambda,\mu}$: $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)(M) = 0$ avec $\lambda + \mu = 1$.
   (b) Montrer que le centre de $C_{\lambda,\mu}$ est barycentre de ceux de C_1 et C_2 avec les coefficients λ et μ.
   (c) Montrer que par tout point hors de l'axe radical passe un et un seul cercle du faisceau. Que se passe-t-il sur l'axe radical ?
3. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des cercles orthogonaux à C_1 et C_2, et C' un élément de $\mathcal{G}$.
   (a) Montrer que le centre de C' est situé sur l'axe radical de C_1 et C_2.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des centres des éléments de $\mathcal{G}$.
   (c) Montrer que tout point de $\mathcal{A}$ est centre d'un unique élément de $\mathcal{G}$.
4. Montrer que :
   (a) tout cercle de $\mathcal{F}$ est orthogonal à tout cercle de $\mathcal{G}$;
   (b) $\mathcal{G}$ est un faisceau linéaire de cercles engendré par deux quelconques de ses éléments ;
   (c) $\mathcal{F}$ est l'ensemble des cercles orthogonaux à deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$.

Partie IV – Constructions

1. On suppose que C_1 et C_2 sont tangents. Caractériser géométriquement les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.
   Faire une figure pour : $C_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$, $\quad C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 4$.
2. On suppose $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des cercles passant par A et par B. Quel est l'ensemble des cercles de $\mathcal{G}$?
   Faire une figure pour : $C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 7$, $\quad C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 4$.
3. On suppose que $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Démontrer que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des cercles passant par deux points U et V (dont on déterminera une construction).
   Faire une figure pour : $C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 1$, $\quad C_2 : (x+3)^2 + y^2 = 6$.
   Que remarque-t-on sur les figures des deux dernières questions ?

↷

Problème – Porisme de Steiner

Soit C le cercle de centre O et de rayon R, A un point de C et C' le cercle de centre O' et de rayon $R' > R$. L'objectif de ce problème est d'étudier une suite de cercles $(C_k(A))_{k\geq 1}$ qui vérifie :

- ▷ $C_1(A)$ est tangent à C et C' et passe par A ;
- ▷ pour tout $k \geq 1$, $C_k(A)$ est tangent extérieurement à C ;
- ▷ pour tout $k \geq 2$, $C_k(A)$ est tangent à C, C' et $C_{k-1}(A)$;
- ▷ pour tout $k \geq 3$, $C_k(A)$ est différent de $C_{k-2}(A)$.

Une suite $(C_k(A))_{k\geq 1}$ est périodique de période N si $C_{N+1}(A) = C_1(A)$.

Partie A – Configuration de cercles concentriques

On suppose, dans cette partie, que les cercles C et C' sont concentriques (c'est-à-dire $O = O'$) et l'on note O_k le centre du cercle $C_k(A)$, R_k son rayon.

1. Montrer que R_k ne dépend pas de k et déterminer sa valeur.
2. Notons θ l'angle géométrique $(\widehat{\overrightarrow{OO_k}, \overrightarrow{OO_{k+1}}})$ qui ne dépend par de k ; établir que
$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{R'-R}{R'+R}.$$
3. En déduire qu'une suite $(C_k(A))_{k\geq 1}$ est périodique de période $N > 2$ si et seulement si R et R' vérifient une condition que l'on déterminera. Existe-t-il des suites de période 2 ? Pourquoi ?
4. Vérifier que cette condition ne dépend pas du point A choisi sur C.

Partie B – Inversion

1. Décrire, selon les valeurs de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, l'ensemble $C_{a,b,c,d}$ d'équation
$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0.$$
Considérons un cercle C'' centré sur l'origine O de rayon $\rho > 0$. Définissons l'inversion de cercle C'' par
$$I_{C''} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \setminus \{O\} & \to & \mathcal{P} \setminus \{O\} \\ M & \mapsto & M' \end{array} \right.$$
où M' est le point de la demi droite $[O, M)$ tel que $OM.OM' = \rho^2$.
2. (a) Déterminer les coordonnées de $I_{C''}(M)$ en fonction des coordonnées de $M(x, y)$.
   (b) Montrer que, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout point M différent de l'origine :
$$M \in C_{a,b,c,d} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_{C''}(M) \in C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}.$$
   (c) En déduire une condition suffisante pour que $I_{C''}$ transforme un cercle donné en un cercle.
3. Soit C et C' deux cercles d'intersection vide. Montrer qu'il existe un cercle C'' tel que $I_{C''}(C)$ et $I_{C''}(C')$ soient des cercles de même centre. Montrer que l'on peut choisir le centre de C'' extérieur à C et C' dès que C est intérieur strictement à C'.

Partie C – Configuration d'un cercle intérieur à l'autre

On considère désormais que C est strictement intérieur à C' (leur intersection est donc vide).
On suppose qu'une suite $(C_n(A))_{n\geq 1}$ est périodique de période N.
Montrer qu'une suite $(C_n(B))_{n\geq 1}$ construite à partir d'un autre point $B \in C$ est aussi périodique de période N.

↷

Problème 1 – Fonctions de Green

Partie A – Exemples

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
   (a) Montrer que l'équation différentielle avec les conditions aux limites définie par
   $$\forall t \in [0,1],\ -y''(t) = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
   admet au plus une solution.
   (b) Vérifier qu'une solution du problème précédent est
   $$t \mapsto \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,$$
   avec
   $$G : (t,s) \mapsto \begin{cases} t(1-s) & \text{si } 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t) & \text{si } 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}.$$
   Indication: : on pensera à « couper » l'intégrale en t.
2. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Considérons l'équation différentielle définie par
   $$\forall t \in [0,\pi],\ -y''(t) - y(t) = f(t).$$
   (a) Déterminer les solutions de l'équation homogène.
   (b) Chercher une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme
   $$t \mapsto A(t)\cos t + B(t)\sin t$$
   avec des fonctions A, B dérivables et vérifiant
   $$\forall t, \qquad A'(t)\cos t + B'(t)\sin t = 0$$
   (c) En déduire qu'une solution de l'équation différentielle est de la forme
   $$t \mapsto -\int_0^t \sin(t-s)f(s)ds + A\cos t + B\sin t,$$
   avec $A, B \in \mathbb{R}$.
   (d) Exhiber une fonction $G : [0, \frac{\pi}{2}]^2 \to \mathbb{R}$ telle que la solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ est donnée de la forme
   $$t \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(t,s)f(s)ds.$$
   (e) Donner une forme analogue pour la solution de l'équation différentielle vérifiant $y'(0) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Partie B – Cas général

Soit $a < b$, $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et
$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & -y'' + q.y \end{cases}$$
On cherche à résoudre l'équation différentielle $\Phi(y) = f$ où f est une fonction donnée avec les conditions aux limites
$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) & + & \beta_1 y'(a) & = & 0 \\ \alpha_2 y(b) & + & \beta_2 y'(b) & = & 0 \end{cases}$$
avec α_1, α_2, β_1 et $\beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.
Considérons y_1 une solution de $\Phi(y_1) = 0$ et $\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0$ et y_2 une solution de $\Phi(y_2) = 0$ et $\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0$.

1. Montrer que la fonction $W : t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$ est constante.
2. Soit, pour $C \in \mathbb{R}$,
   $$G : (t,s) \mapsto \begin{cases} Cy_1(t)y_2(s) & \text{si } a \le t \le s \le b, \\ Cy_2(t)y_1(s) & \text{si } a \le s \le t \le b. \end{cases}$$
   Trouver C de sorte à ce que
   $$y : t \mapsto \int_a^b G(t,s)f(s)ds$$
   soit solution de $\Phi(y) = f$.
3. À quelle condition la fonction y de la question précédente vérifie-t-elle les conditions aux limites ?

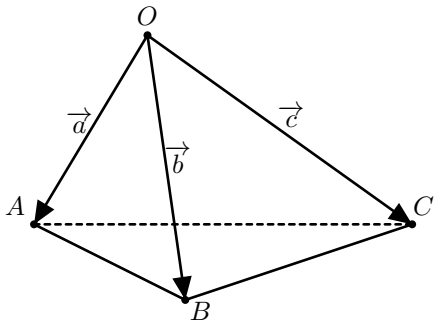
Partie C – Une équation de Sturm-Liouville

1. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$
   $$-(x^2y'(x))' - y(x) = 0,$$
   en posant $z(t) = y(e^t)$.
2. Soit $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ continue. En s'inspirant de la partie B, trouver la solution de
   $$-(x^2y'(x))' - y(x) = f(x),$$
   telle que $y(1) = 0$ et $y(e) = 0$.

↷

Problème 2 – Droites remarquables d'un tétraèdre

Soit O, A, B, C quatre points de l'espace non coplanaires et $OABC$ le tétraèdre formé sur ces points.



Notons $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$ et supposons ces vecteurs deux à deux non orthogonaux.
Dans tout le problème, deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Partie A – Préliminaires

1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace deux à deux non colinéaires tels que
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$
Montrer que l'intersection des plans passant par O et de vecteurs normaux $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ respectivement est la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
Cette question sera utilisée dans chacune des parties suivantes.
2. Rappeler (sans démonstration) la formule donnant la distance d'un point M au plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$.

Partie B – Hauteur issue du sommet O

1. Déterminer (en fonction de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$) un vecteur normal du plan passant par O et A et perpendiculaire au plan (OCB).
Ce plan est appelé plan hauteur du tétraèdre issu du côté OA ; on définit de même les plans hauteurs issus des côtés OB et OC.
2. (a) Rappeler (sans démonstration) la formule du double produit vectoriel.
(b) Montrer que
$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}.$$
3. En déduire que l'intersection des trois plans hauteurs issus de OA, OB et OC est une droite dont on précisera un vecteur directeur.

Partie C – Bissectrice issue du sommet O

1. Montrer que l'ensemble des points équidistants des plans (OAB) et (OAC) est la réunion de deux plans perpendiculaires dont on précisera les vecteurs normaux $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$.
2. Vérifier qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que
$$\langle \overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{b} \rangle . \langle \overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{c} \rangle < 0.$$
Le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{u}_i$ est le plan bissecteur du tétraèdre issu du côté OA ; on définit de même les plans bissecteurs issus des côtés OB et OC.
3. Montrer que l'intersection des trois plans bissecteurs issus de OA, OB et OC est une droite dont on précisera un vecteur directeur.

Partie D – Médiane issue du sommet O

1. Montrer que l'ensemble des points équidistants des droites (OB) et (OC) est l'ensemble des points équidistants des plans passant par O et de vecteurs normaux $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.
En déduire que cet ensemble est formé de deux plans orthogonaux.
2. Montrer que l'un de ces plans admet un vecteur normal tel que
$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b} \rangle . \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{c} \rangle < 0.$$
Ce plan est appelé plan médiateur de (OB) et (OC) ; on définit de même les plans médiateurs de (OC) et (OA) et de (OA) et (OB).
3. Montrer que l'intersection des trois plans médiateurs est une droite dirigée par
$$\frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|.\|\overrightarrow{b}\|} + \frac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}}{\|\overrightarrow{b}\|.\|\overrightarrow{c}\|} + \frac{\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{c}\|.\|\overrightarrow{a}\|}.$$

↷

Problème – Courbes de Bézier

Notons $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormé.
Soit n un entier ≥ 2. Si $t \in \mathbb{R}$ et $k \leq n$, posons $\lambda_k(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.
À tout $(n+1)$-uplet de points $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{P}$ et tout réel $t \in [0,1]$, on associe $B(t)$ le barycentre de la famille $(A_k, \lambda_k(t))_{0 \leq k \leq n}$: on appelle arc de Bézier l'arc paramétré $B : [0,1] \mapsto \mathcal{P}$ qui à t associe $B(t)$. On appelle courbe de Bézier le support $\Gamma(A_0, ..., A_n)$ le support de B. Enfin on appelle cubique de Bézier une courbe de Bézier définie par quatre points, *i.e.* $n = 3$.
On rappelle qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

Partie A – Exemples et premières propriétés

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(t) = 1$.
2. Montrer que $\Gamma(A_0, \ldots, A_n) = \Gamma(A_n, \ldots, A_0)$ (en renversant l'ordre des points de définition).
3. Montrer que lorsque $A_0 \neq A_1$, la tangente à l'arc de Bézier en A_0 est dirigée par $\overrightarrow{A_0A_1}$.
4. Soit A_0 d'affixe z_0 et $\overrightarrow{u}$ d'affixe α. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on définit A_k par
$$\overrightarrow{A_0A_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{u}.$$
Déterminer la courbe $\Gamma(A_0, \ldots, A_n)$.
5. Soit $\omega = e^{i2\pi/n}$. Déterminer l'affixe de $B(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ lorsque l'affixe de A_k est ω^k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
6. Notons pour cette question $A_0(0,0)$, $A_1(0,1)$, $A_2(1,1)$ et $A_3(1,0)$.
   (a) Étudier et tracer l'arc de Bézier pour les points de définition A_0, A_1, A_2 et A_3. Déterminer une équation de la tangente en $B(\frac{1}{2})$.
   (b) Mêmes questions pour l'arc défini par les points A_0, A_2, A_1 et A_3.

Partie B – Portion de parabole comme cubique de Bézier

1. Montrer que l'arc d'une cubique de Bézier est uniquement déterminé par ses extrémités et ses dérivées en ces points.
2. Soit $\mathcal{C}$ d'équation $y = P(x)$ pour $x \in [0, L]$ où P est un polynôme de degré au plus 3. Notons $A_0(0, P(0))$, $A_3(L, P(L))$, A_1 le point de la tangente à $\mathcal{C}$ en A_0 d'abscisse $\frac{L}{3}$ et A_2 le point de la tangente à $\mathcal{C}$ en A_3 d'abscisse $\frac{2L}{3}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est la cubique de Bézier associée aux points A_0, A_1, A_2 et A_3.
3. Montrer que toute portion de parabole issue du sommet est une cubique de Bézier.
4. La portion $\mathcal{C}_+$ du cercle unité située dans le quadrant $x \geq 0$ et $y \geq 0$ est-elle une courbe de Bézier ?

Partie C – Découpage de courbes de Bézier

1. Soient $x_0 \in [0,1]$ et $l \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des coefficients $(\alpha_i^{(l)})_{i \leq l}$ tels que :
$$\forall x \in [0,1], \qquad (x_0 - x)^l = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i^{(l)} x^i (1-x)^{l-i}$$
Indication : on pourra remarquer que $x_0 - x = (x_0 - 1)x + x_0(1-x)$.
Soient B l'arc paramétré de Bézier associé aux points $A_0, \ldots, A_n$ et A'_n un point de l'arc de paramètre $t_0 \in]0,1[$.
2. Montrer que l'arc $B_{|[0,t_0]}$ est encore un arc de Bézier à $n+1$ points.
3. En déduire que toute portion de parabole est une cubique de Bézier.

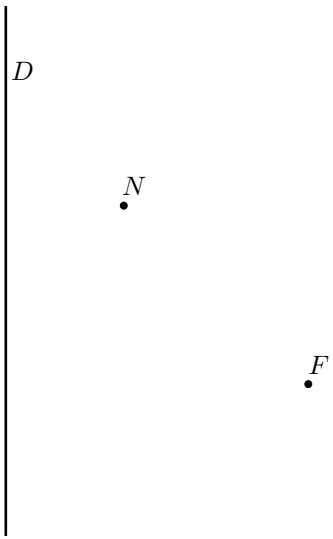
↷

Exercice – Tangentes à une parabole

Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point hors de la droite $\mathcal{D}$. Considérons $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

Soit M_0 un point de $\mathcal{P}$, H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}_0$ la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point M_0.

1. Justifier que pour tout point N de la droite $\mathcal{T}_0$, $\mathrm{NH}_0 = \mathrm{NF}$.
2. Montrer que tout point N de la droite $\mathcal{T}_0$, distinct de M_0, est extérieur à la parabole $\mathcal{P}$.
3. Soit N un point du plan.
   Déterminer le nombre de tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par N selon la position de N par rapport à $\mathcal{P}$.
4. Dans le cas où il existe deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par le point N, déduire des questions précédentes une construction « à la règle et au compas » de ces tangentes.
5. Construire les deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par le point N sur le dessin suivant :



Problème – Résolution géométrique de l'équation de Pell-Fermat

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - py^2 = 1$ avec p un nombre premier et posons $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathbb{N}^2$.
Notons S_0 le point de coordonnées (1,0) et S_1 le point de $\mathcal{S}$ de coordonnées (a, b) avec a minimal supérieur ou égal à 2 (par exemple, si $p = 5$ alors S_1 a pour coordonnées $(9, 4)$).

Partie A – Étude de $\mathcal{H}$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{e_1}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{p}})$ et $\vec{e_2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{p}})$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et donner les coordonnées de S_0.
3. Montrer que l'application coordonnée e_1^* réalise une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^*$.
4. Pour tout couple de points $(M, N) \in \mathcal{H}^2$, on définit $M \otimes N$ comme le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse $e_1^*(M).e_1^*(N)$.
   (a) Calculer $S_0 \otimes S_0$ puis $S_0' \otimes S_0'$ où S_0' désigne le symétrique de S_0 par rapport à l'origine.
   (b) Soient $(M, N) \in \mathcal{H}^2$. A quelle condition la droite (MN) est-elle parallèle à la tangente à $\mathcal{H}$ en S_0 ?
   (c) Soient $(M, N) \in \mathcal{H}^2$ tel que la droite (MN) n'est pas parallèle à la tangente à $\mathcal{H}$ en S_0. Que dire de la droite passant par S_0 et $M \otimes N$?
   (d) Montrer que $(\mathcal{H}, \otimes)$ est un groupe abélien.

Partie B – Étude de $\mathcal{S}$

Définissons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (ax + pby, bx + ay) \end{array} \right.$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = f(S_n)$.

1. L'application f est-elle bijective ?
2. Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{H}$, $f(M) = S_1 \otimes M$.
3. En déduire que $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$.
4. Montrer que M appartient à la portion de $\mathcal{H}$ comprise entre S_n et S_{n+1} si, et seulement si $f(M)$ appartient à la portion de $\mathcal{H}$ comprise entre S_{n+1} et S_{n+2}.
5. Déterminer $\mathcal{S}$ puis expliquer comment obtenir $\mathcal{H} \cap \mathbb{Z}^2$.

↷

Problème I – Chaînes et antichaînes

Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$.

- ▷ Une chaîne de E est un ensemble de parties de E totalement ordonné pour l'inclusion.
- ▷ Une antichaîne de E est une ensemble de parties de E qui ne sont pas comparables deux à deux pour l'inclusion.
- ▷ Une chaîne (respectivement une antichaîne) est dite maximale si elle n'est pas strictement incluse dans une chaîne (respectivement une antichaîne).

Partie A – Inégalité (Bollobas)-Lubell-Yamamoto-Meshalkin

1. Donner toutes les chaînes maximales de l'ensemble $\{a, b, c\}$.
2. (a) Montrer que le nombre de chaînes maximales de E est $n!$.
   (b) En déduire le nombre de chaînes maximales contenant une partie $A \subset E$ de cardinal k.
3. Soit A et B deux parties d'une antichaîne de E.
   Montrer que A et B n'appartiennent pas à une même chaîne de E.
4. Considérons une antichaîne de E et notons a_k le nombre de parties de cardinal k de cette antichaîne.
   Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \leq n!.$$

Partie B – Théorème de Sperner

L'objectif de cette partie consiste à déterminer C_n, le plus grand cardinal d'une antichaîne maximale de E (toujours de cardinal n).

1. Montrer que $C_n \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
2. (a) Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
   (b) En utilisant la partie A, montrer que $C_n \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
3. Conclure.

Problème II – Dénombrement des dérangements

Partie A – Dénombrement des surjections

Notons $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

1. (a) Calculer $S_{n,p}$ pour $p > n$, puis pour les cas particuliers $p \in \{1, 2, n\}$.
   (b) Calculer $S_{p+1,p}$.
2. (a) Montrer que $\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$ pour $q \leq k \leq p$.
   (b) En déduire que, si $0 \leq q < p$, alors $\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$.
3. Supposons désormais $p \leq n$.
   (a) Démontrer (par un raisonnement combinatoire) $p^n = \sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$.
   (b) En déduire que $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.
   (c) En déduire que si $p \geq 2$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
   Montrer que $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$.

Partie B – Dénombrement des dérangements

Un dérangement de $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. Notons d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. Par convention, $d_0 = 1$.

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
2. En déduire que $d_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

Problème III – Systèmes de Steiner

Un système de Steiner de paramètres $(p, q, n) \in \mathbb{N}^3$ est une partie $S(p, q, n) \subset \mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) E est un ensemble de cardinal n.

(ii) Tout élément de $S(p, q, n)$ est une partie de E de cardinal p :
$$\forall A \in S(p, q, n), \qquad \text{card}\,(A) = p$$

(iii) Toute partie de E de cardinal q est incluse dans une unique partie de $S(p, q, n)$:
$$\forall B \in \mathcal{P}(E), \qquad \text{card}(B) = q \quad \Rightarrow \quad \exists! A \in S(p, q, n), \quad B \subset A.$$

On veillera à bien rédiger toutes les questions de dénombrement.

↷

Partie A – Exemples

1. Montrer qu'il n'existe pas de système de Steiner pour $p < q < n$.
2. Déterminer un système de Steiner $S(q, q, n)$ pour chaque $q \leq n$ puis calculer $\text{card}(S(q, q, n))$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p et n pour l'existence d'un système de Steiner $S(p, 1, n)$.
   Préciser, lorsque cette condition est vérifiée, le cardinal d'un tel système de Steiner.

Partie B – Cardinal d'un système de Steiner

On suppose qu'il existe un système de Steiner $S(p, q, n)$ d'un ensemble E.

1. Soit $x \in E$ fixé.
   (a) Déterminer le nombre de parties de E de cardinal q contenant x.
   (b) Déterminer le nombre de parties de E de cardinal q contenant x et incluses dans une partie de cardinal p fixée.
   (c) En déduire le nombre $r(p, q, n)$ de parties du système de Steiner $S(p, q, n)$ contenant x.
2. Montrer que $\text{card}\,(S(p, q, n)) = \frac{n}{p} r(p, q, n)$.

Partie C – Demoiselles de Kirkman

Quinze demoiselles se promènent chaque jour en cinq rangs de 3. Déterminer le nombre maximal de jours de promenade tel que toute paire de demoiselles ne se retrouve jamais deux fois dans le même rang.
Indication: on pourra commencer par calculer $\text{card}\,(S(3, 2, 15))$.

Exercice – p-groupe de Prüfer

Soit p un nombre premier.
Notons $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$ l'ensemble de toutes les racines de l'unité dont l'ordre est une puissance de p.

1. Montrer que G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Justifier que G n'est pas monogène.
3. Soit H un sous-groupe de G distinct de G, $z_0 \in G \setminus H$ d'ordre p^{n_0}.
   (a) Montrer que si H contient un élément d'ordre p^n alors $\mathbb{U}_{p^n} \subset H$.
   (b) Montrer que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.
   (c) En déduire que H est cyclique.

Problème – Groupe abélien fini comme $\mathbb{Z}$-module

Soit $(G, .)$ un groupe abélien fini d'ordre supérieur ou égal à 2, d'élément neutre e. On admettra les résultats suivants :

- ▷ L'ordre d'un élément $x \in G$ est l'ordre du groupe cyclique engendré par x ; c'est aussi le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$.
- ▷ Lemme d'Euclide : Si m et n sont deux nombres premiers entre eux divisant a, alors $m.n$ divise a.
- ▷ Lemme de Gauss : Si m et n sont deux nombres premiers entre eux et que m divise $a.n$, alors m divise a.

Partie A – Sous-groupes cycliques de G

1. Soit x et y deux éléments de G d'ordre m et n tels que m et n sont premiers entre eux. Montrer que l'ordre de l'élément $x.y$ est $m.n$.
2. Soit x un élément de G d'ordre n et d un diviseur de n. Déterminer l'ordre de l'élément x^d.
3. Notons ϵ le plus petit multiple commun des ordres des éléments de G (appelé exposant de G) et considérons la décomposition en facteurs premiers $\epsilon = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
   (a) En utilisant la définition de plus petit multiple commun, justifier, pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, l'existence d'un élément dont l'ordre est divisible par $p_i^{\alpha_i}$.
   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un élément x_i d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
   (c) Conclure qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre ϵ.
   (d) Plus généralement, montrer qu'il existe un sous-groupe de G cyclique d'ordre n si et seulement si n divise ϵ.

Partie B – Facteurs cycliques de G

1. Soit H un sous-groupe strict de G, x un élément de $G \cap H^c$ et $\varphi : H \to \mathbb{U}$ un morphisme de groupes.
   (a) Montrer que $K = \{x^k.h,\ (k, h) \in \mathbb{Z} \times H\}$ est un sous-groupe de G contenant H et x.
   (b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in H$.
   Posons $N_x = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in H\}$.
   (c) Justifier l'existence de $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $\varphi(x^{N_x}) = \omega^{N_x}$.
   (d) Montrer qu'il existe un morphisme de groupe $\tilde{\varphi} : K \to \mathbb{U}$ tel que :
   $$\forall h \in H, \qquad \tilde{\varphi}(h) = \varphi(h)$$
   Indication: on pourra poser, pour tout $(k, h) \in \mathbb{Z} \times H$, $\tilde{\varphi}(x^k.h) = \omega^k \varphi(h)$.
   (e) Conclure qu'il existe un morphisme de groupes $\psi : G \to \mathbb{U}$ tel que :
   $$\forall h \in H, \qquad \psi(h) = \varphi(h)$$
2. Soit $x \in G$ un élément d'ordre ϵ. Exhiber un isomorphisme de groupe φ entre le sous-groupe engendré par x (dorénavant noté $\langle x \rangle$) et $\mathbb{U}_\epsilon$.
   Notons encore φ le prolongement de ce morphisme au groupe G.
3. (a) Montrer que tout élément de G s'écrit de manière unique sous la forme $y.h$ avec $(y, h) \in \langle x \rangle \times \mathrm{Ker}\varphi$.
   (b) En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{U}_\epsilon \times \mathrm{Ker}\varphi$.
4. Montrer qu'il existe des entiers $n_1, \ldots, n_s$ supérieurs ou égaux à 2 tels que :
   ▷ pour tout $i \in [\![1, s-1]\!]$, n_i divise n_{i+1}.
   ▷ G est isomorphe à $\mathbb{U}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{U}_{n_s}$.

↷

Exercice – Groupe diédral

Soit un entier $n \geq 3$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \omega^k.z \end{array} \right. , \qquad g_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \omega^k.\overline{z} \end{array} \right.$$

Pour simplifier les notations, on notera pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f_k et g_k les applications f_r et g_r où $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $k = r[n]$ (autrement dit, on utilise les indices modulo n).

1. Montrer que l'ensemble $G = \{f_0, \ldots, f_{n-1}, g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la composition.
2. Le groupe G est-il cyclique ?
3. Montrer que G est engendré par $\{f_1, g_0\}$ puis que
$$f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}.$$
4. Soit $(H, *)$ un groupe engendré par $\{\rho, \sigma\}$ où les éléments ρ et σ vérifient
$$\rho \text{ est d'ordre } n,\ \sigma \text{ est d'ordre } 2,\ \rho * \sigma = \sigma * \rho^{-1}.$$
Montrer que G et H sont isomorphes.
Indication: on pourra montrer que les éléments de G (respectivement de H) sont de la forme $f_1^k \circ g_0^\alpha$ (respectivement $\rho^k * \sigma^\alpha$) avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\alpha \in \{0, 1\}$.

Exercice – Quaternions et rotations de $\mathbb{R}^3$

Considérons l'ensemble $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$; par conséquent, tout élément $x \in E$, appelé quaternion, s'écrira de la forme suivante $(x_0, \overrightarrow{x})$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$. Si $x_0 = 0$, alors x est dit quaternion pur.
Posons enfin, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_E = \sqrt{x_0^2 + \|\overrightarrow{x}\|^2}.$$

Partie A – Produit, conjugaison et norme

Pour tout $x, y \in E$, on définit $x \otimes y \in E$ par

$$x \otimes y = (x_0 y_0 - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle, x_0 \overrightarrow{y} + y_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}).$$

On admet que $\otimes$ est une loi de composition interne associative sur E.

1. Calculer le produit $(\lambda, \overrightarrow{0}) \otimes x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$. En déduire l'élément neutre pour $\otimes$.
2. Pour tout $x \in E$, on pose $\overline{x} = (x_0, -\overrightarrow{x})$.
   (a) Montrer que $x \otimes \overline{x} = \overline{x} \otimes x = (\|x\|_E^2, \overrightarrow{0})$ pour tout $x \in E$.
   (b) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\overline{x \otimes y} = \overline{y} \otimes \overline{x}$.
3. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall x, y \in E, \qquad \|x \otimes y\|_E = \|x\|_E \|y\|_E.$$

Désormais, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ désigne une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Partie B – Propriétés de groupes

Notons U l'ensemble des $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$, U_n l'ensemble des éléments de $x \in E$, tels que $x^{\otimes n}$, la puissance n-ème de x pour $\otimes$, soit égale à $(1, \overrightarrow{0})$ et $\mathbb{U}_n = \{(X, Y\overrightarrow{i}) \in U_n,\ \text{avec } (X, Y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que U muni de $\otimes$ est un groupe non-abélien.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de U, qu'il est abélien.
3. Définissons pour tout $a \in U$ et $x \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$, $\varphi_a(x) = a \otimes x \otimes a^{-1}$.
   (a) Montrer que, pour tout $a \in U$, $\varphi_a(\{0\} \times \mathbb{R}^3) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^3$.
   (b) Pour tout $(a, b) \in U^2$, montrer que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \otimes b}$.
   (c) Soit $a \in U$. Déterminer les éléments invariants par φ_a.

Problème – Principalité d'anneaux d'entiers

Partie A – Anneaux d'entiers quadratiques

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathbb{Q}(i\sqrt{d}) = \{a + ib\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $d' \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré (c'est-à-dire tel que les exposants dans la décomposition en facteurs premiers soient strictement inférieur à 2) tel que
$$\mathbb{Q}(i\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{d'}).$$
2. Vérifier que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$; est-ce un corps ?

↷

3. Fixons $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et notons A_d l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ tels qu'il existe a_0, $a_1 \in \mathbb{Z}$ vérifiant
$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$
   (a) Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Montrer que $a + ib\sqrt{d} \in A_d$ si et seulement si
$$2a \in \mathbb{Z} \text{ et } a^2 + db^2 \in \mathbb{Z}.$$
   Indication: on pourra remarquer que $x = a + ib\sqrt{d}$ est racine de $X^2 - 2aX + a^2 + db^2$.
   On cherche désormais les éléments $x = a + ib\sqrt{d} \in A_d$ avec $a = \frac{n}{2}$ et $b = \frac{p}{q}$ où n, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.
   (b) Montrer que si n est pair, alors $a \in \mathbb{Z}$, $d\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Z}$ puis que $b \in \mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que si n est impair, alors $4d\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Z}$ puis que $q = 2$. Justifier que cette situation entraîne $d = 3[4]$.
   Indication: on pourra considérer l'expression $n^2 + dp^2$ modulo 4.
   (d) Conclure que si $d = 1[4]$ ou $d = 2[4]$,
$$A_d = \{a + ib\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Z}\},$$
   et si $d = 3[4]$,
$$A_d = \left\{a + b\frac{1 + i\sqrt{d}}{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$
   (e) Vérifier que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Partie B – A_{19}

1. Préciser le reste de la division de 19 par 4.
2. Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. Déterminer un polynôme de degré 2 à coefficients entiers dont α est racine.
3. Soit x, $y \in A_{19}$ non nuls.
   (a) Montrer qu'il existe u, $v \in \mathbb{Q}$ tels que
$$\frac{x}{y} = u + v\alpha.$$
   Notons $n = \lfloor v \rfloor$.
   (b) Supposons que $v \notin]n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}[$ et notons a, $b \in \mathbb{Z}$ les entiers les plus proches de u et v, $q = a + b\frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $r = x - qy$.
   Montrer que $r \in A_{19}$ et que $|r| < |y|$.
   (c) Supposons que $v \in]n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}[$. Montrer qu'il existe q, $r \in A_{19}$ tels que $2x = qy + r$ et $|r| < |y|$.
   Nous venons d'établir une propriété de « pseudo-division euclidienne ».
4. Soit l'idéal $I_2 = 2A_{19}$ engendré par 2.
   (a) Montrer que I_2 est un idéal de l'anneau A_{19}.
   (b) Soit x, $y \in A_{19}$ tels que $xy \in I_2$. Montrer que $x \in I_2$ ou $y \in I_2$.
   On admet que si $q \notin I_2$ alors il existe $u, v \in A_{19}$ tels que $2u + qv = 1$.
5. Soit I un idéal de A_{19} différent de $\{0\}$ et $y \in I$ non nul de module minimal. Soit $x \in I$.
   (a) Montrer que s'il existe q, $r \in A_{19}$ tel que $x = qy + r$ et $|r| < |y|$, alors x appartient à l'idéal engendré par y.
   (b) Montrer que s'il existe q, $r \in A_{19}$ tel que $2x = qy + r$ et $|r| < |y|$, alors x appartient à l'idéal engendré par y.
   (c) Conclure.

Partie C – Groupe de classes

Dans cette partie, A est un anneau intègre.

1. Soit I et J deux idéaux de A. Montrer que l'ensemble $I.J$ des sommes finies de termes de la forme $x \times y$ avec $x \in I$, et $y \in J$ est un idéal de A inclus dans I et J.
2. Soit a, $b \in A$. Calculer $(aA).(bA)$.
3. Deux idéaux non nuls I et J sont équivalents s'il existe a, $b \in A \setminus \{0\}$ tels que
$$(aA).I = (bA).J$$
   Vérifier que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des idéaux non nuls de A.
4. Montrer que si A est principal alors il n'existe qu'une classe d'idéaux non nuls.
5. Soit des idéaux non nuls I, I', J et J' tels que I et I' soient équivalents et J et J' soient équivalents. Vérifier que $I.J$ est équivalent à $I'.J'$.
6. *On a donc défini une loi de composition interne produit sur les classes d'équivalence d'idéaux. L'ensemble des classes d'équivalence d'idéaux d'un anneau A_d est un groupe pour le produit, appelé groupe des classes.*
   Déterminer le groupe des classes de A_{19}, A_3 et A_5.

Exercice – Théorème de Wolstenhome

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Partie A – Calculs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

1. (a) Vérifier que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps.
   (b) Déterminer les éléments qui sont leur propre inverse pour la loi ..
   (c) En déduire le théorème de Wilson $\overline{(p-1)!} = \overline{-1}$.
2. Notons, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\overline{p_k} = \left(\overline{k}\right)^{-2}$.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \overline{p_k} = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2$.
   (c) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{0}$.
   (d) Conclure que $\sum\limits_{k=1}^{p-1} p_k$ est divisible par p.

Partie B – Théorème de Wolstenhome

Notons $\frac{A}{B}$ l'écriture irréductible du rationnel $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $pB \sum\limits_{k=1}^{p-1} p_k = 2A(p-1)!$.
2. En déduire que p^2 divise A.

Problème – Suite de Lucas

Considérons les suites $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad S_n = L_{3.2^n}$$

Posons $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\omega = 2 + \sqrt{5}$ et $\overline{\omega} = 2 - \sqrt{5}$.

Partie A – Premières propriétés

1. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et L_n en fonction de Φ et $\overline{\Phi}$.
   (b) Vérifier que, pour tout $k, r \in \mathbb{N}$, $2L_{2k+r} - L_r L_{2k} = 5F_r F_k L_k$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{2n} - L_n^2 = 2.(-1)^{n+1}$.
   En déduire une relation de récurrence simple vérifiée par la suite $(S_n)_n$.
3. Vérifier que $S_n = \omega^{2^n} + \overline{\omega}^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B – Relations de congruence

Dans cette partie on pensera à utiliser la relation obtenue à la question 1b de la partie A.

1. Montrer que, pour tout $k, r \in \mathbb{N}$, $2L_{2k+r} = 2(-1)^{k+1} L_r [L_k]$
2. Montrer, par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}$, que L_k divise $2^\alpha L_{3^\alpha.k}$.
   Soit $n \geq 5$ un entier impair. Notons r son reste et $3^\alpha.q$, avec q non divisible par 3, son quotient dans la division euclidienne par 4.
3. Montrer que $L_n = -1[L_{2q}]$ ou que $L_n = -4[L_{2q}]$.

Partie C – Théorème de Cohn

1. Démontrer le petit théorème de Fermat : Pour tout nombre premier p et tout entier a non-divisible par p, $a^{p-1} = 1[p]$.
2. (a) Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $x \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 = -1[p]$.
   (b) Soit n un entier congru à 3 modulo 4. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $x \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 = -1[n]$.
3. Montrer que L_{2n} n'est pas le carré d'un entier.
   Indication: on pourra raisonner par l'absurde en utilisant la question 2 de la partie A.
4. Montrer que pour tout q non divisible par 3, $L_{2q} = 3[4]$.
   Indication: on pourra commencer par montrer que $L_{n+6} = L_n[4]$ pour tout entier n.
5. Déduire des résultats précédents que si $n \notin \{1, 3\}$, L_n n'est pas le carré d'un entier.

Partie D – Test de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne

Le nombre de Mersenne d'indice $n \in \mathbb{N}$ est l'entier $M_n = 2^n - 1$.

↷

1. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.
   Considérons p un nombre premier tel que M_p divise S_{p-2} et supposons que M_p est composé. Notons q un diviseur premier de M_p strictement inférieur à $\sqrt{M_p}$ et introduisons l'anneau $A = \{x + \sqrt{5}y,\ x, y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\}$ avec $\sqrt{5}$ un élément de carré $3 \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
2. Montrer que A^* est de cardinal au plus $q^2 - 1$.
3. Montrer que le groupe engendré par ω contient 2^p éléments.
4. En déduire que M_p est alors premier.

Exercice – Un critère d'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$

Soit P un polynôme à coefficients entiers et $n \in \mathbb{N}$ tels que
- ▷ Pour toute racine complexe z de P, $\mathfrak{Re}(z) < n + \frac{1}{2}$.
- ▷ $P(n) \neq 0$
- ▷ $P(n+1)$ est un nombre premier.

Supposons que $P = Q.R$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que toute racine de Q est de partie réelle strictement inférieure à $n + \frac{1}{2}$.
2. Soit z tel que $\mathfrak{Re}(z) < n + \frac{1}{2}$. Justifier que $|z - (n+1)| > |z - n|$.
3. En déduire que $|Q(n+1)| > 1$ si Q est non constant.
   Indication: on pourra commencer par comparer $|Q(n+1)|$ et $|Q(n)|$.
4. En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Problème – Théorème de Fermat

Partie A – Étude d'une application

Considérons N l'application qui à un polynôme non-nul $P \in \mathbb{C}[X]$ associe le nombre de racines distinctes de ce polynôme P.

1. Justifier que $N(P) \leq \deg P$. Pour quels polynômes a-t-on égalité ?
2. Montrer que, pour tous polynômes P et Q, $N(PQ) \leq N(P) + N(Q)$. Pour quels polynômes a-t-on égalité ?
3. Montrer que, pour tout polynôme P et tout entier naturel non-nul n, $N(P^n) = N(P)$.
4. Déterminer les polynômes tels que $N(P) = 0$.

Partie B – Inégalité de Mason-Stothers

Soit A, B et C trois polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux et vérifiant $A+B+C = 0$. On cherche à montrer l'inégalité de Mason-Stothers

$$N(ABC) \geq \max(\deg A, \deg B, \deg C) + 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P unitaire, scindé à racines simples tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad A(z)B(z)C(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(z) = 0.$$
   Déterminer le degré de P.
   Considérons les fractions rationnelles $R = \frac{A}{C}$ et $S = \frac{B}{C}$.
2. Établir que $\frac{B}{A} = -\frac{\frac{R'}{R}}{\frac{S'}{S}} = -\frac{P\frac{R'}{R}}{P\frac{S'}{S}}$.
3. Montrer que $P\frac{R'}{R}$ et $P\frac{S'}{S}$ sont des polynômes de degré au plus $N(ABC) - 1$.
4. En déduire que B divise $P\frac{R'}{R}$ et que A divise $P\frac{S'}{S}$ et donc que
   $$\max(\deg A, \deg B) \leq N(ABC) - 1.$$
5. Conclure.

Partie C – Théorème de Fermat

Démontrer le théorème de Fermat pour les polynômes :
Si $n \geq 3$, alors il n'existe pas de polynômes P, Q, et R deux à deux premiers entre eux, non-constants tels que $P^n + Q^n = R^n$.

↷

Exercice 1 – Déjà vu

Écrire une procédure qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la n-ième ligne du triangle de Pascal dans une structure de séquence.

Exercice 2

1. Écrire une procédure `chiffres` qui prend un entier strictement positif et qui renvoie la liste de ses chiffres dans l'ordre habituel d'écriture.

```
> chiffres(1234);
                                    [1, 2, 3, 4]
```

2. Écrire une procédure `dechiffres` qui prend une liste de chiffres dans l'ordre habituel d'écriture et qui renvoie l'entier strictement positif qui correspond.

```
> dechiffres([1, 2, 3, 4]);
                                          1234
```

3. Écrire une procédure `reverse` qui prend une liste et la renvoie dans l'ordre inverse.

```
> reverse([1, 2, 3, 4]);
                                    [4, 3, 2, 1]
```

4. Écrire une procédure `test` qui teste si un entier a une écriture décimale palindrome (c'est-à-dire si son écriture décimale lue dans les deux sens donne le même entier).

```
> test(1234);
                                          false
> test(12321);
                                          true
```

5. Écrire une procédure `exercice` qui prend un entier $n > 0$ et renvoie la séquence des entiers inférieurs à n dont l'écriture décimale est un palindrome.

```
> exercice(123);
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99,
 101, 111, 121
```

Exercice 3 – Mystère

Identifier la procédure suivante.

```
mystere := proc(t)
local k:=0, m:=t[0];
for x in t do
    if x>m then k:=k+1 end if;
end do;
k
end proc;
```

Problème – Somme de deux carrés

1. Écrire la séquence des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 inférieur à 500.
2. Écrire une procédure `truc` qui prend un nombre n et renvoie si c'est possible le plus petit entier $a \in [\![1, n]\!]$ tel que n divise $a^2 + 1$ et `FAIL` s'il n'existe pas de tels entiers.
   On fixe dorénavant p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et a la valeur renvoyée par truc(p).
3. Considérons les suites définies par $x_0 = a$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{x_0^2+y_0^2}{p}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n \notin \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n r_n + y_n s_n}{z_n} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n s_n - y_n r_n}{z_n} \\ z_{n+1} &= \frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{p} \end{aligned}$$

   où r_n et s_n sont égaux x_n et y_n respectivement modulo z_n et de valeur absolue inférieure ou égal à $\frac{z_n}{2}$.
   (a) Vérifier que, pour tout entier n tel que les quantités soient définies
   $$z_n^2(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) = (x_n^2 + y_n^2)(r_n^2 + s_n^2).$$
   (b) En déduire que la suite (finie) $(z_n)_n$ est strictement décroissante.
   (c) Notons $N = \inf\{n \in \mathbb{N},\ z_n \in \{0, 1\}\}$. Écrire une procédure qui prend p et a en arguments et qui renvoie (x_N, y_N).
   (d) Montrer que $z_N = 1$ puis calculer $x_N^2 + y_N^2$.

↷

Problème – Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Ce devoir regroupe des questions indépendantes autour de la définition suivante.

Définition 1

Un polynôme $P(X)$ à coefficients entiers est irréductible sur $\mathbb{Z}$ si pour tout couple $(A(X), B(X))$ de polynômes à coefficients entiers tels que $P(X) = A(X)B(X)$, soit $A(X)$ soit $B(X)$ est égal à 1 ou -1.

Partie A – Premiers exemples

1. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Factoriser le polynôme $X^4 + (2a - b^2)X^2 + a^2$ comme produit de deux polynômes de degré 2.
   En déduire que $X^4 + X^2 + 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Z}$.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $X^4 + 4$.
   Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible sur $\mathbb{Z}$?
3. Montrer que le polynôme $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Soit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ des entiers.
   (a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ pour n impair.
   (c) Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Partie B – Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$

Le contenu d'un polynôme P à coefficients entiers est le pgcd de ses coefficients ; on ne note $c(P)$. Un polynôme à coefficients entiers est primitif si son contenu est égal à 1.

1. (a) Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est primitif.
   (b) En déduire que, pour tout couple (P, Q) de polynômes à coefficients entiers, $c(PQ) = c(P)c(Q)$.
2. Soit P et Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{Q}[X]$ tels que $PQ \in \mathbb{Z}[X]$.
   Notons α et β les ppcm des dénominateurs des coefficients de P et Q dans leur écriture irréductible.
   (a) Montrer que $\alpha.P$ et $\beta.Q$ sont à coefficients entiers.
   (b) Justifier que les entiers α et $c(\alpha.P)$ sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que $\alpha\beta c(PQ) = c(\alpha P)c(\beta Q)$.
   (d) En déduire que PQ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Partie C – Critère de Perron

1. Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$|a_{n-1}| > 1 + \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|.$$
   (a) Montrer que $P(X)$ n'admet pas de racine de module 1.
   (b) Supposons que $P(X)$ admette une racine z_1 de module strictement supérieur à 1 et notons
$$P(X) = (X - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k.$$
      i. Calculer b_{n-1}, b_0 puis montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$a_k = b_{k-1} - z_1 b_k.$$
      ii. En déduire que
$$|b_{n-2} - z_1| \geq 1 + |b_{n-2}| + (|z_1| - 1) \sum_{k=0}^{n-2} |b_k|,$$
      puis que
$$1 > \sum_{k=0}^{n-2} |b_k|.$$
      iii. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ n'a pas de racine de module supérieur à 1.
   (c) Conclure que P admet au plus une racine de module supérieure ou égale à 1 et que celle-ci est simple.
2. Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ à coefficients entiers tel que $a_0 \neq 0$ et
$$|a_{n-1}| > 1 + \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|.$$
   Supposons que $P(X) = A(X)B(X)$ avec $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes non constants à coefficients entiers.
   (a) En étudiant les coefficients constants de A et B, montrer que ces polynômes admettent une racine de module supérieur ou égal à 1.
   (b) Conclure.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Le polynôme $X^n + 15485863X^{n-1} + 2^{23}$ est-il irréductible sur $\mathbb{Z}$?

↷

Partie D – Critère de Osada

Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que a_0 est premier et

$$|a_0| > 1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

Supposons que $P(X) = A(X)B(X)$ avec $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes non constants à coefficients entiers.

1. Montrer que $|A(0)| = 1$ ou $|B(0)| = 1$.
2. En déduire que P admet une racine de module inférieur au égal à 1.
3. Conclure que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Partie E – Critère de Polya

1. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers de degré n et des entiers $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.
   (a) Montrer que le coefficient dominant de P est
   $$\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_l}.$$
   Indication: on pensera à l'interpolation de Lagrange.
   (b) En déduire qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|P(\alpha_k)| \geq n!2^{-n}$.
2. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers de degré n, α_1, α_2, $\ldots$, α_n des entiers deux à deux distincts non racines de P tels que
   $$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad |P(\alpha_k)| < M!2^{-M},$$
   où $M = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
   Supposons que $P(X) = A(X)B(X)$ avec A et B non constants à coefficients entiers.
   (a) Montrer que l'on peut supposer que $\deg A \geq M$.
   (b) Vérifier que $(\deg A)!2^{-\deg A} \geq M!2^{-M}$.
   (c) Conclure.

Exercice – Développement en série de Engel

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$.
   Montrer que la suite $(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{a_0-1}$.
   Si x est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit alors que x admet un **développement de Engel** et on note $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.
2. Prouvons dans cette question l'existence du développement de Engel pour tout $x \in]0,1]$. Soit $x \in]0,1]$. Définissons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & 1 + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \\ x_{n+1} & = & a_n x_n - 1 \end{array}\right.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$. En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
   (b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante puis que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers et que $a_0 \geq 2$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$. En déduire que $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.
3. Montrons par l'absurde l'unicité du développement de Engel. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geq 2$, $b_0 \geq 2$ et
$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$
   Introduisons $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq b_n\}$.
   (a) Montrer que $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$.
   (b) Montrer que si $x = [\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots]$, alors $\alpha_0 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
   Indication: : on pourra commencer par montrer que $0 \leq \alpha_0 x - 1 < 1$.
   (c) Conclure.
4. (a) Déterminer le réel dont le développement de Engel est associé à une suite constante égale à $p \geq 2$.
   (b) Pour tout $a \geq 3$, notons $r(a)$ la racine de $]0,1[$ de $X^2 - aX + 1$ (dont on n'utilisera pas l'expression explicite).
      i. Montrer que $r(a)^2 = r(a^2-2)$ puis que $r(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} r(a^2-2)$.
      ii. En déduire que le développement de Engel de $r(p)$ pour un entier $p \geq 3$ est $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha_0 = p$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{n+1} = \alpha_n^2 - 2$$
      Indication: on pourra remarquer $r(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} r(\alpha_{n+1})$ pour tout n.
5. Montrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si et seulement si son développement de Engel correspond à une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

Problème – Réels mal approchés

Partie A – Fractions continues

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on définit les suites $(\alpha_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par $\alpha_0 = \alpha$ et $n_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$ et les relations de récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - n_k}, \qquad n_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor.$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \notin \mathbb{Q}$.
   (b) En déduire que les suites $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ et $(n_k)_{k\geq 0}$ sont bien définies.
2. Déterminer la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ pour les irrationnels $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{2}$.
   Considérons $(p_k)_{k\geq -1}$ et $(q_k)_{k\geq -1}$ les suites croissantes d'entiers définies par $p_{-1} = 1$, $p_0 = n_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ et, pour tout $k \geq -1$,
$$\begin{array}{rcl} p_{k+2} & = & n_{k+2} p_{k+1} + p_k \\ q_{k+2} & = & n_{k+2} q_{k+1} + q_k \end{array}$$
3. Montrer, par récurrence, que
$$\forall k \geq -1, \qquad p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k.$$
4. (a) Montrer successivement que, pour tout $k \geq 0$,
$$\alpha = \frac{p_{k+1}\alpha_{k+2} + p_k}{q_{k+1}\alpha_{k+2} + q_k}, \qquad q_k(p_k - \alpha q_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}}.$$
   (b) Montrer l'inégalité de Dirichlet
$$\forall k \geq 0, \qquad \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}.$$
5. (a) Montrer que les suites $(\frac{p_{2k}}{q_{2k}})_{k\geq 0}$ et $(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}})_{k\geq 0}$ sont adjacentes de limite α.

↷

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{a}{b}$ une fraction (sous forme irréductible) telle que

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|.$$

Montrer que $b > q_k$.

Dans la suite de l'énoncé, on appelle $(n_k)_{k\geq 0}$ l'écriture en fractions continues de α et la suite $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ la suite des meilleures approximations de α.

Partie B – Irrationnels mal approchés

Un irrationnel α de suite des meilleures approximations $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ est dit mal approché si la borne inférieure de l'ensemble $\{q_n|p_n - \alpha q_n|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est strictement positive. Dans le cas contraire, α est dit bien approché.

1. Montrer qu'il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\kappa}{q^2}.$$

$\sqrt{2}$ est-il bien approché ?

2. (a) Montrer que l'écriture en fraction continue $(n_k)_{k\geq 0}$ de α est bornée si et seulement si α est mal approché.

   (b) En déduire que Φ est mal approché.

Problème – Produits infinis

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) (appelée produit (p_n)) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \dots u_n.$$

Par définition, le produit (p_n) converge si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon, le produit (p_n) diverge.

Partie A

1. En considérant le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2. Posons, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + \frac{1}{p})$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = n + 1$.

   (b) Quelle est la nature du produit (p_n) ?

3. Soit $a \notin \pi\mathbb{Z}$ et $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}$ pour tout $n \geq 1$.

   Calculer, pour tout $n \geq 1$, $p_n . \sin \frac{a}{2^n}$; en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

Partie B

1. Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

   (b) Posons, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

   Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

   Lorsque (S_n) converge vers ℓ donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ.

2. Posons, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

   (a) Montrer que :

$$\forall p \geq 3, \quad \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \frac{\ln p}{p}.$$

   (b) En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

Partie C

1. Posons, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 et $S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

   (a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1 + x) < x$.

   (b) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

   (c) Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

2. Posons, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + a^{2^p})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?

↷

(b) Supposons $a \in]0,1[$.

i. Montrer que le produit (p_n) converge.

ii. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1-a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice – Module de continuité uniforme

Le module de continuité d'une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction ω_f définie par

$$\forall t \in [0,1], \qquad \omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leq t\}.$$

1. Calculer ω_g pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$.
   Indication: on pourra vérifier que : $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$ pour tous $x > y \geq 0$.
2. Soit f une fonction continue.
   (a) Montrer que ω_f est une fonction croissante et calculer $\omega_f(0)$.
   (b) Montrer que la fonction ω_f est sous-additive, c'est-à-dire que, pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$ tel que $u + v \leq 1$, $\omega_f(u+v) \leq \omega_f(u) + \omega_f(v)$.
   (c) Montrer que la fonction ω_f est continue.
   Indication: on pourra justifier puis utiliser l'uniforme continuité de f.
   (d) Montrer que si ω_f s'annule hors de 0, alors ω_f est identiquement nulle. Préciser les fonctions f pour lesquelles $\omega_f = 0$.
3. Soit $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante, nulle à l'origine et sous-additive. Montrer qu'il existe une fonction dont ω est le module de continuité.

Exercice – Équation fonctionnelle

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)).$$

1. Montrer que, si $f \in E$ et $(r,x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, alors $f(rx) = r^2 f(x)$.
2. Déterminer les éléments de E continus sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les éléments de E monotones sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les éléments de E bornés au voisinage de 0.

Exercice

Soit F l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1], \qquad |f(x)| \leq C|x|.$$

1. (a) Justifier que les fonctions de F sont nulles en 0 et continues en 0.
   (b) Montrer que si f, $g \in F$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g \in F$.
   (c) Justifier que les fonctions nulles en 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ appartiennent à F.

   Dans la suite du problème, on considère $f \in F$ à valeurs positives et on cherche les solutions y continues en 0 de l'équation (E)

$$\forall x \in [0,1], \qquad y(x) - y\left(\frac{x}{2}\right) = f(x).$$

2. Posons, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(u_n(x))_n$ est croissante majorée.
   (b) Montrer qu'une suite croissante majorée converge.
   Notons $u(x)$ la limite de la suite $(u_n(x))_n$.
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)$ appartient à F puis qu'elle est solution de (E).
3. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution y continue en 0 telle que $y(0) = y_0$.
4. Montrer qu'il existe une unique fonction de F solution de (E).
5. Soit $\alpha > 1$. Trouver l'unique solution dans F de (E) pour $f : x \mapsto x^\alpha$.

Problème – Fonctions à dérivée nulle pp

Partie A – Préliminaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable par morceaux et continue. Supposons que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ où f est dérivable. Montrer que f est constante.

Partie B – Autour du lemme de Cousin

Soit $a < b$ et $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$. Une subdivision de $[a,b]$ plus fine que δ est un couple formé

- ▷ d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$,
- ▷ de points t_1, t_2,..., t_n tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad t_k - \delta(t_k) < x_{k-1} \leq t_k \leq x_k < t_k + \delta(t_k).$$

1. Soit $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{123} & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$ et $x_k = \frac{k}{42}$ pour $k \in [\![0,42]\!]$.
   Trouver tous les points t_1, t_2,..., t_n pour lesquels que la subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_{42}$ est plus fine que δ.
2. L'objectif de cette question est de montrer le lemme de Cousin suivant

   Lemme 1

   Pour tout segment $[a,b]$ et toute application $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, il existe une subdivision de $[a,b]$ plus fine que δ.

   Fixons $a < b$, $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ et notons E l'ensemble des $x \in [a,b]$ tel qu'il existe une subdivision de $[a,x]$ plus fine que δ.
   (a) Justifier que E admet une borne supérieure.
   (b) Montrer que E admet un plus grand élément.
   (c) En déduire que $\max E = b$ puis conclure.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de réels tels que si $x \notin \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$. Fixons enfin $\varepsilon > 0$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\delta(x_n) > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_n - \delta(x_n), x_n + \delta(x_n)[, \qquad |f(x) - f(x_n)| \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

   (b) Soit $x \notin \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer qu'il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$\forall y \in]x - \delta(x), x + \delta(x)[, \qquad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon|y - x|.$$

   (c) Montrer, en utilisant le lemme de Cousin, que pour tout $a < b$,

$$|f(b) - f(a)| \leq 2(1 + b - a)\varepsilon.$$

   (d) Conclure.

↷

Partie C – Fonction de Cantor

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\{0,1\}$.
   (a) Montrer que les suites $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}\right)_n$ et $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2a_k}{3^k}\right)_n$ sont convergentes.
   Notons $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k}$ les limites de ces suites.
   (b) Calculer $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k}$
   - ▷ pour la suite $(a_k)_k$ constante égale à 1 ;
   - ▷ pour la suite $(a_k)_k$ constante égale à 1 jusqu'au rang N (inclus) puis nulle après ;
   - ▷ pour la suite $(a_k)_k$ nulle jusqu'au rang N (inclus) puis constante égale à 1 après.

   Définissons, pour tout $x\in[0,1]$,
$$f(x)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}\text{ pour }(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\text{ telle que }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k}\leq x\right\}.$$
2. Justifier que la fonction f est croissante, non constante.
3. Montrer que f est constante sur tout intervalle de la forme
$$\left]\sum_{k=1}^{N}\frac{2a_k}{3^k}+\frac{1}{3^{N+1}},\sum_{k=1}^{N}\frac{2a_k}{3^k}+\frac{2}{3^{N+1}}\right[$$
   avec $a_1,\dots,a_N\in\{0,1\}$. Préciser la valeur de f sur cet intervalle.
4. Montrer que f est continue.
5. L'ensemble des éléments de la forme $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k}$ avec $(a_k)_k$ à valeurs dans $\{0,1\}$ est-il dénombrable ?

Partie D – Une autre fonction pathologique

On admet ici que tout réel $x\in]0,1]$, il existe une suite strictement croissante $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$
$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha_k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{\alpha_k}}.$$
Soit $r>0$ différent de 1. Posons $f(0)=0$ et pour tout $x\in]0,1]$ d'écriture binaire donnée par la suite $(\alpha_k)_k$,
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{(1+r)^{\alpha_k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{r^k}{(1+r)^{\alpha_k}}.$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
3. Soit $x\in]0,1]$ d'écriture binaire donnée par la suite $(\alpha_k)_k$ et, posons pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$x_n=\sum_{\substack{k=0\\ \alpha_k\leq n}}\frac{1}{2^{\alpha_k}},\qquad y_n=x_n+\frac{1}{2^n}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$f(y_n)-f(x_n)=\frac{r^{A_n}}{(1+r)^n},$$
   avec $A_n=\operatorname{card}\{k\in\mathbb{N},\ \alpha_k\leq n\}$.
   (b) En déduire que $\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$ puis que f est continue en x.
   (c) Supposons $r<1$. Montrer que si f est dérivable en x, alors $f'(x)=0$.

Partie E – Bonus

Montrer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des bornes en utilisant le lemme de Cousin (et pas la propriété de la borne supérieure).

↷

Exercice 1 – Fonctions SCI

Une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est SCI si

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - x_0| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

1. (a) Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle est SCI.
   (b) Déterminer une fonction SCI qui n'est pas continue.
2. (a) Montrer que la somme de deux fonctions SCI sur un intervalle I est encore une fonction SCI.
   (b) Montrer que le produit de deux fonctions SCI n'est pas forcément une fonction SCI.
3. Soit f une fonction SCI sur un segment I.
   (a) Montrer que f est minorée.
   (b) Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \inf\limits_{x \in I} f(x)$.

Exercice 2 – Fonction de Takagi

1. Considérons les fonctions $g : x \mapsto \left|x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor\right|$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n : x \mapsto \frac{g(2^n x)}{2^n}.$$

   (a) Tracer la courbe représentative de g.
   (b) Montrer que les fonctions g_n sont 1-lipschitziennes.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_n est affine sur l'intervalle $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$. Quelles valeurs peut prendre la pente ?

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} g_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(2^k x)}{2^k}.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente.
   On note $f(x)$ la limite de cette suite.
   (b) Montrer que f est 1-périodique et paire.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{n+3}{2^n}.$$

   (d) Conclure que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissons deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par

$$a_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}{2^{n+1}} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor + 1}{2^{n+1}}.$$

   On admet que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et préciser la limite commune.
   (b) Vérifier que $f(a_n) = f_n(a_n)$ et $f(b_n) = f_n(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Justifier que $\frac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$. Calculer $|\Delta_{n+1} - \Delta_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Montrer que si f est dérivable en x, alors la suite $(\Delta_n)_n$ converge vers $f'(x)$.
   (f) Conclure.
4. (a) Soit $x = \frac{k}{2^n}$ et $x_p = x + \frac{1}{2^p}$ pour $p \geq 2n$. Montrer que $f(x_p) > f(x)$.
   (b) En déduire que f n'est monotone sur aucun intervalle.

↷

Problème – Commutants

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 2$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, définissons le commutant de f comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}.$$

Partie A – Exemples de commutants

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
   (b) Vérifier que, pour tout $g \in \mathcal{C}(f)$,
   $$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad g(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}).$$
   (c) Donner un contre exemple à la réciproque de la question précédente.
2. Déterminer le commutant d'une homothétie.
3. Soit s une symétrie.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{C}(s)$ si et seulement si
   $$g(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}), \quad g(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}).$$
   (b) En déduire $\dim \mathcal{C}(s)$ en fonction de $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et de $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.
4. Soit s et s' deux symétries qui commutent.
   (a) Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 et F_4 tels que
   $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(s - Id) & = & F_1 \oplus F_2 \\ \mathrm{Ker}(s + Id) & = & F_3 \oplus F_4 \\ \mathrm{Ker}(s' - Id) & = & F_1 \oplus F_3 \\ \mathrm{Ker}(s' + Id) & = & F_2 \oplus F_4. \end{array}$$
   (b) Montrer que $g \in \mathcal{C}(s) \cap \mathcal{C}(s')$ si et seulement si g laisse stables les quatre sous-espaces F_1, F_2, F_3 et F_4.
5. Déterminer les endomorphismes qui commutent avec toutes les symétries.

Partie B – Symétries du commutant

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, notons $\mathcal{C}'(f)$ l'ensemble des symétries de E appartenant à $\mathcal{C}(f)$.

1. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{C}'(f)$ est non-vide. Est-ce un espace vectoriel ?
2. Soit s une symétrie. Montrer que $\mathcal{C}'(s)$ est un ensemble infini.
3. Soit s et s' deux symétries qui commutent, F_1, F_2, F_3 et F_4 les sous-espaces introduits à la question A.4.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{C}'(s) \cap \mathcal{C}'(s')$ si et seulement si g est une symétrie et
   $$\forall i \in [\![1, 4]\!], \qquad g(F_i) \subset F_i.$$
   (b) Montrer que $h \in \bigcap_{g \in \mathcal{C}'(s) \cap \mathcal{C}'(s')} \mathcal{C}'(g)$ si et seulement si h est une symétrie et la restriction de h à chacun des espaces F_1, F_2, F_3 et F_4 est une homothétie.
   (c) En déduire que
   $$\mathrm{card} \bigcap_{g \in \mathcal{C}'(s) \cap \mathcal{C}'(s')} \mathcal{C}'(g) = 2^m,$$
   où m est le nombre des sous-espaces F_1, F_2, F_3 et F_4 non réduits à $\{0_E\}$.

Exercice – 1 éléphant, 4 éléphants

Considérons l'ensemble $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^2}$.

1. Justifier rapidement que E est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel.
2. Considérons les endomorphismes de E définis par
   $$\begin{array}{rcl} f : (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1})_{i,j} \\ t_b : (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (a_{i,j-1})_{i,j} \\ t_h : (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (a_{i,j+1})_{i,j} \\ t_g : (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (a_{i-1,j})_{i,j} \\ t_d : (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (a_{i+1,j})_{i,j} \end{array}$$
   (a) Exprimer f en fonction de t_h, t_b, t_g et t_d.
   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer la composée f^{2^p} en fonction des composées de t_h, t_b, t_g et t_d.
3. Voici un dessin d'éléphant pixélisé (le dessin initial était très beau)

↷

On déforme cette image en appliquant à plusieurs reprises la même transformation : dans l'image modifiée, un pixel est noir si et seulement si, parmi ses quatre voisins directs, il y avait 1 ou 3 pixels noirs dans l'image à l'étape précédente.
Montrer qu'à une certaine étape, l'image comporte 4 éléphants et rien d'autre.

Exercice – Endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice m, c'est-à-dire tel que $u^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{m-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A – Trigonalisation

1. Montrer que $m \leq n$.
2. Justifier que $\mathrm{Ker} u \neq \{0_E\}$.
3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur tel que $\mathrm{Ker} p \subset \mathrm{Ker} u$. Montrer que
$$\forall j \geq 2, \qquad p \circ u^j = (p \circ u)^j.$$
4. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

Parie B – Endomorphismes de composition associés

Soit g_u, d_u et ad_u les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ définis, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, par
$$\begin{aligned} g_u(f) &= u \circ f \\ d_u(f) &= f \circ u \\ \mathrm{ad}_u(f) &= g_u(f) - d_u(f) = u \circ f - f \circ u. \end{aligned}$$

1. Montrer que g_u et d_u sont nilpotents d'indice m.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E)$,
$$\mathrm{ad}_u^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ f \circ u^k.$$
3. Montrer que ad_u est nilpotent et majorer son indice de nilpotence par $2m-1$.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$.
Indication: ou pourra raisonner matriciellement.
5. En déduire l'indice de nilpotence de ad_u.

Problème – Extensions de corps de dimension finie

Partie A – Nombres algébriques

Pour tout corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit $\mathbb{K}[\alpha]$ comme le $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par la famille $\{\alpha^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si et seulement si α est racine d'un polynôme non-nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si cette condition est réalisée, on dit que α est $\mathbb{K}$-algébrique.
2. Supposons que $\alpha \neq 0$ est $\mathbb{K}$-algébrique.
   (a) Justifier l'existence et l'unicité de polynôme de $\mathbb{K}[X]$, unitaire, de degré minimal admettant α pour racine.
   On notera ce polynôme $\Pi_{\mathbb{K},\alpha}$.
   (b) Montrer que $\Pi_{\mathbb{K},\alpha}$ n'admet pas de racine multiple sur $\mathbb{C}$.
   Indication: on pourra utiliser le pgcd $\Pi'_{\mathbb{K},\alpha} \wedge \Pi_{\mathbb{K},\alpha}$.
   (c) Montrer que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] = \deg \Pi_{\mathbb{K},\alpha}$ et en déduire une base de $\mathbb{K}[\alpha]$.
   (d) Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
3. Déterminer la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$ sur $\mathbb{Q}$ dans les cas suivants :
   (a) $\alpha = \sqrt{2}$
   (b) $\alpha = \sqrt[3]{2}$
   (c) $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
   (d) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
4. On suppose encore que α est $\mathbb{K}$-algébrique et on considère β une racine dans $\mathbb{C}$ de $\Pi_{\mathbb{K},\alpha}$ (distincte de α).
   (a) Montrer que $\Pi_{\mathbb{K},\alpha} = \Pi_{\mathbb{K},\beta}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\varphi : \mathbb{K}[\alpha] \to \mathbb{C}$ (i.e. une application linéaire φ telle que $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$ pour tous x, y) qui vérifie $\varphi(\alpha) = \beta$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{K}[\beta]$.
   (d) Conclure que les algèbres $\mathbb{K}[\alpha]$ et $\mathbb{K}[\beta]$ sont isomorphes.

Partie B – Nombres constructibles

Tous les corps considérés ici sont des sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$. Commençons par quelques définitions.
▷ Soit E un ensemble fini de points du plan. Considérons toutes les droites passant par deux points de E et tous les cercles centrés en un de ces points de rayon égal à la distance de deux points quelconques de E. Les points d'intersection de ces droites et cercles deux à deux sont dits points construits à partir de E.

↷

▷ Un point M du plan est dit constructible s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que :

- ▷ M_1 est construit à partir de l'ensemble des deux points $O(0,0)$ et $I(1,0)$
- ▷ pour tout $i \leq n$, M_i est construit à partir de l'ensemble $O, I, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$.

▷ Un réel est dit constructible s'il est égal à l'abscisse d'un point constructible de l'axe (Ox) ou à l'ordonnée d'un point constructible de l'axe (Oy).

1. Considérons a, b, c, a', b', c' des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) On suppose que le système
   $$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$
   admet une unique solution (x, y). Montrer que $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[y] = \mathbb{K}$.
   (b) On suppose que le système
   $$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ (x-a')^2 & + & (y-b')^2 & = & c'^2 \end{array}\right.$$
   admet deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Montrer que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1] \in \{1, 2\}$.
   (c) On suppose que le système
   $$\left\{\begin{array}{ccccc} (x-a)^2 & + & (y-b)^2 & = & c^2 \\ (x-a')^2 & + & (y-b')^2 & = & c'^2 \end{array}\right.$$
   admet deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Montrer que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1] \in \{1, 2\}$.
2. (a) Montrer que si α est constructible, alors il existe une suite $(\mathbb{K}_i)_{i \leq N}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{K}_N$ et pour tout $i < N$, $\dim_{\mathbb{K}_i} \mathbb{K}_{i+1} \in \{1, 2\}$.
   (b) En déduire que si α est constructible, alors $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha]$ est une puissance de 2.
   (c) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.
3. (a) Soit deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ tels que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}' = 2$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}'$ tel que $\mathbb{K}' = \mathbb{K}[\alpha]$ et α est racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients $\mathbb{K}$.
   (b) Montrer que s'il existe une suite $(\mathbb{K}_i)_{i \leq N}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, et pour tout $i < N$, $\dim_{\mathbb{K}_{i-1}} \mathbb{K}_i \in \{1, 2\}$, alors tout élément de $\mathbb{K}_N$ est constructible. Indication: on pourra admettre que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

↷

Problème – Polytope de Birkhoff

Ce problème étudie la géométrie d'une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: une sorte de polyèdre dans cet espace de dimension n^2. Au fil des questions, on déterminera, entre autres, quels sont les « sommets » de ce polyèdre et quelle est la dimension du plus petit espace vectoriel le contenant.

- ▹ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients positifs $(a_{i,j})_{i,j\leq n}$ est bistochastique si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} = 1$. En d'autres termes, une matrice est bistochastique si la somme des coefficients sur une ligne ou sur une colonne est égale à 1.
- ▹ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})_{i,j\leq n}$ est de permutation s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$) telle que $A = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{\sigma(i),i}$ ou de manière équivalente telle que $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ (où δ désigne le symbole de Kronecker). On notera M_σ la matrice de permutation associée à la permutation σ.

Partie A – Sommets du polytope de Birkhoff

1. Montrer que I_n est bistochastique et de permutation ; préciser la permutation associée.
   Exhiber une matrice bistochastique non inversible.
2. Vérifier que l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer que toute matrice de permutation est bistochastique.
   Étudier la réciproque.
   (b) Supposons qu'une matrice de permutation M_σ s'écrive $\lambda A + (1-\lambda)B$ où A, B sont des matrices bistochastiques et $\lambda \in]0, 1[$.
   Montrer que A et B sont de permutation.

Partie B – Espace engendré par le polytope

Notons F le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices bistochastiques et G le sous-espace des matrices dont la somme des coefficients sur chacune ligne et sur chacune colonne est égale à 0.

1. Montrer qu'une matrice appartient à F si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que la somme des coefficients sur chacune ligne et sur chacune colonne de cette matrice est égale à c.
2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(J_n) \oplus G$ où J_n est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
3. Montrer qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j\leq n}$ de G est uniquement déterminée par ses coefficients $(m_{i,j})_{i,j\leq n-1}$. En déduire que
$$\dim G \leq (n-1)^2.$$
4. (a) Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension $N \geq p$ est au moins de dimension $N - p$.
   (b) Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, notons L_i^* (respectivement C_j^*) la forme linéaire qui associe à une matrice la somme des coefficients de la ligne i (respectivement de la colonne j).
   Montrer que $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} L_i^* \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n-1} \mathrm{Ker} C_j^*$; en déduire que
$$\dim G \geq (n-1)^2.$$
5. En déduire la dimension de F.
6. Notons U le vecteur-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 et H le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs dont la somme des coefficients est nulle.
   (a) Montrer que $M \in F$ si et seulement si M laisse stable $\mathrm{Vect}(U)$ et H.
   (b) Retrouver la dimension de F.
   Indication: on pourra montrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(U)$ et H sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie C – Théorème de Birkhoff

L'objectif de cette partie est d'obtenir le théorème suivant

Théorème 2 (*Birkhoff*)

Toute matrice bistochastique est un barycentre à coefficients positifs d'un nombre fini de matrices de permutations.

1. Décomposer la matrice $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme barycentre à coefficients positifs de matrices de permutations.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})_{i,j\leq n}$ telle que $\prod\limits_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = 0$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe I, J deux parties de $[\![1, n]\!]$ telles que la matrice extraite $(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ soit nulle et $\mathrm{card}\, I + \mathrm{card}\, J = n + 1$.
   Indication: on pourra raisonner par récurrence forte sur n.

↷

3. En déduire que si la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ est bistochastique, alors il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \neq 0$.

   Indication: on pourra raisonner par l'absurde et calculer la somme de tous les coefficients d'une matrice bistochastique.

4. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ une matrice bistochastique et σ une permutation associée à A telle que $\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \neq 0$. Considérons

$$\alpha = \min\{a_{\sigma(j),j},\ \text{avec } j \in [\![1, n]\!]\} > 0.$$

   (a) Déterminer A dans le cas où $\alpha = 1$.

   (b) Si $\alpha < 1$, montrer que $A - \alpha M_\sigma = (1 - \alpha)B$ où B est une matrice bistochastique qui admet strictement plus de coefficients nuls que A.

5. Montrer le théorème de Birkhoff.

Exercice – Cercles de Gerschgorin

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Supposons que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$
et considérons $X = (x_i) \in \mathrm{Ker}A$.
   (a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$.
   Indication: on pourra raisonner par l'absurde et considérer la plus grande coordonnée de X en valeur absolue.
   (b) En déduire que A est inversible.
   Une valeur propre de A est un nombre complexe λ tel que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_n$ ne soit pas injective.
2. Que dire des matrices admettant 0 comme valeur propre ?
3. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que
$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$
4. En déduire qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que
$$|a_{j,j} - \lambda| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Problème – Endomorphismes croisés

Définition 2

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Deux endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$ sont croisés s'il existe $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que
$$u = b \circ a, \qquad v = a \circ b.$$

Partie A – Décomposition de Fitting

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Notons
$$\mathcal{N}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker} f^k, \qquad \mathcal{I}_f = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im} f^k.$$

1. Montrer que la suite $(\mathrm{Ker} f^k)_k$ est croissante pour l'inclusion et que la suite $(\mathrm{Im} f^k)_k$ est décroissante pour l'inclusion.
2. (a) Montrer qu'il existe un rang r à partir duquel la suite la suite $(\mathrm{Ker} f^k)_k$ est stationnaire alors qu'elle est strictement croissante avant.
   (b) Montrer que la suite $(\mathrm{Im} f^k)_k$ est également stationnaire à partir de ce rang r.
   (c) Déterminer ce rang r pour un projecteur.
3. En déduire que $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{I}_f$ sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par f.
4. Montrer que $E = \mathcal{N}_f \oplus \mathcal{I}_f$.
5. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur $\mathcal{N}_f$ est nilpotent.
Cet endomorphisme est noté $f_{\mathcal{N}}$.
6. Que dire de l'endomorphisme induit par f sur $\mathcal{I}_f$?
Cet endomorphisme est noté $f_{\mathcal{I}}$.

Partie B – Cas général

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$. On considère $u_{\mathcal{N}}$, $u_{\mathcal{I}}$, $v_{\mathcal{N}}$ et $v_{\mathcal{I}}$ les endomorphismes associés d'après la partie précédente.

1. (a) Supposons $E = E_1 \oplus E_2$ et considérons $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(x) = f_1(x)$ si $x \in E_1$ et $f(x) = f_2(x)$ si $x \in E_2$.
   (b) Montrer que si $u_{\mathcal{N}}$ et $v_{\mathcal{N}}$ sont croisés et si $u_{\mathcal{I}}$ et $v_{\mathcal{I}}$ sont croisés, alors u et v sont croisés.
2. Supposons qu'il existe $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que
$$u = b \circ a, \qquad v = a \circ b.$$
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a(\mathrm{Ker}(b \circ a)^k) \subset \mathrm{Ker}(a \circ b)^k$; en déduire que $a(\mathcal{N}_u) \subset \mathcal{N}_v$.
   (b) Montrer que $a(\mathcal{I}_u) \subset \mathcal{I}_v$.
   (c) Énoncer les résultats analogues concernant l'application linéaire b.
   (d) Montrer que $u_{\mathcal{N}}$ et $v_{\mathcal{N}}$ sont croisés et que $u_{\mathcal{I}}$ et $v_{\mathcal{I}}$ sont croisés.

À la suite de ces deux parties, on est ramené à étudier le cas des isomorphismes et des applications linéaires nilpotentes : c'est l'objet des deux prochaines parties.

↷

Partie C – Cas des isomorphismes

1. Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie, deux isomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$ tels qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant $u = f^{-1} \circ v \circ f$.
   Montrer que u et v sont croisés.
2. Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, deux isomorphismes croisés $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$ et $a \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que
   $$u = b \circ a, \qquad v = a \circ b.$$
   (a) Montrer que a est un isomorphisme.
   (b) En déduire qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant
   $$u = f^{-1} \circ v \circ f.$$

Partie D – Cas des endomorphismes nilpotents

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\dim \mathrm{Ker} f^{k+1} = \dim \mathrm{Ker} f^k + \dim \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f^k.$$
   Indication: on pourra considérer l'application linéaire
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker} f^{k+1} & \to & E \\ x & \mapsto & f^k(x) \end{array} \right.$$
   (b) En déduire que la suite $(\dim \mathrm{Ker} f^{k+1} - \dim \mathrm{Ker} f^k)_k$ est décroissante.
2. Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, deux endomorphismes nilpotents croisés $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$ et $a \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que
   $$u = b \circ a, \qquad v = a \circ b.$$
   Fixons $k \in \mathbb{N}$ et considérons G un supplémentaire de $\mathrm{Ker} u^{k+1}$ dans $\mathrm{Ker} u^{k+2}$, $H_1 = a(G) \cap \mathrm{Ker} v^{k+1}$ et H_2 un supplémentaire de H_1 dans $a(G)$.
   (a) Montrer que $\dim a(G) = \dim G$ puis que $\dim v(H_2) = \dim H_2$.
   (b) Montrer que $H_1 \oplus v(H_2) \oplus \mathrm{Ker} v^k \subset \mathrm{Ker} v^{k+1}$.
   (c) En déduire que
   $$\dim \mathrm{Ker} v^{k+1} - \dim \mathrm{Ker} v^k \geq \dim G = \dim \mathrm{Ker} u^{k+2} - \dim \mathrm{Ker} u^{k+1}.$$

   On a monté que si deux endomorphismes nilpotents u et v sont croisés, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{array}{rcl} \dim \mathrm{Ker} v^{k+1} - \dim \mathrm{Ker} v^k & \geq & \dim \mathrm{Ker} u^{k+2} - \dim \mathrm{Ker} u^{k+1}, \\ \dim \mathrm{Ker} u^{k+1} - \dim \mathrm{Ker} u^k & \geq & \dim \mathrm{Ker} v^{k+2} - \dim \mathrm{Ker} v^{k+1}. \end{array}$$

   La réciproque est vraie.

↷

Exercice

Soit p, n deux entiers naturels non nuls.

1. Rappeler le $DL_{n-1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^p}$.
2. Soit a, b deux complexes distincts. Déterminer le décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle
$$R(X) = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^p}.$$
3. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{p+k-1}{k} 2^{-p-k} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+k-1}{k} 2^{-n-k}.$$

Problème – Matrices de Hessenberg

Partie I – Ensembles de matrices

1. Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de Hessenberg si $m_{i,j} = 0$ dès que $i > j+1$. Notons $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_n$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
   (b) Soit $M \in \mathcal{H}_n$ et T une matrice triangulaire supérieure. Montrer que MT et TM appartiennent à $\mathcal{H}_n$.
   (c) Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $\mathcal{H}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tridiagonale $m_{i,j} = 0$ dès que $|i-j| > 1$. Montrer que l'ensemble des matrices tridiagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_n$ dont on précisera la dimension.

Partie II – Similitude à une matrice de Hessenberg

1. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est équivalente à une matrice de Hessenberg.
2. (a) Rappeler les différentes matrices élémentaires et leur actions sur une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par produit à gauche ou à droite.
   (b) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients de PMP^{-1} en position $(i, 1)$ pour $i \geq 3$ soient nuls.
   Indication: on pourra utiliser les matrices d'opérations élémentaires.
   (c) Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Hessenberg.

Partie III – Méthode de Householder

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle.
   (a) Montrer que ${}^{\mathrm{t}}XX$ est un réel strictement positif.
   La norme de X est définie par $\|X\| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}XX}$.
   (b) Vérifier que la matrice $\mathrm{I}_n - \frac{2}{\|X\|^2} X\,{}^{\mathrm{t}}X$ est une matrice de symétrie.
2. Soit E_1 la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non colinéaire à E_1 et $X = Y + \|Y\|E_1$.
   Montrer que la matrice $(\mathrm{I}_n - \frac{2}{\|X\|^2} X\,{}^{\mathrm{t}}X)Y$ est colinéaire à E_1.
3. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, il existe une matrice P_r obtenue comme produit de matrices de symétrie telle que $P_r M P_r^{-1}$ soit de la forme par blocs
$$\left(\begin{array}{c:c} H_r & A_r \\ \hdashline 0_{n-r,r-1} \;\vdots\; Y & B_r \end{array}\right)$$
   avec $H_r \in \mathcal{H}_r$, $A_r \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $B_r \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Retrouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Hessenberg.
4. Montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice tridiagonale.

↷

Exercice – Sommes de Riemann

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que f est dérivable en 0.

1. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0) - xf'(0)| \leq \varepsilon x.$$
2. Avec un résultat du cours, expliquer pourquoi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 g(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right) = nf(0) + \int_0^1 g(t)dt f'(0) + o(1).$$
4. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k+n}\right) = nf(0) + f'(0)\ln 2 + o(1)$.

Exercice – Calcul de développement asymptotique

Considérons, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie et l'éventuelle convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
5. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
6. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
7. Déterminer le développement asymptotique de I_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Problème – Transformée de Cesàro

La transformée de Cesàro d'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la fonction f^* de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f^* \ : \ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I – Premiers exemples

1. Supposons dans cette question que $f(x) = \arctan x$.
Calculer f^* puis donner les limites de f et f^* en $+\infty$.
2. Supposons dans cette question que $f(x) = |\sin x|$.
Calculer f^* en fonction de $\cos x$ et de $\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$. Préciser la limite de f^* en $+\infty$.
3. Supposons désormais que f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ pour $x \neq 0$, prolongée par continuité en 0.
   (a) Montrer que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f^* tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Partie II – Propriétés de f*

Dorénavant, f est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f^* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que f^* est continue en 0.
2. Montrer que si f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors f^* admet la même limite quand x tend vers $+\infty$.
3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que si la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$, alors la courbe représentative de f^* admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera une équation en fonction de (α, β).
4. Montrer que si f admet un développement limité à l'ordre n en 0^+, alors f^* admet un développement limité à l'ordre n en 0^+ que l'on précisera.
5. Montrer que si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, f^* est aussi monotone sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que si f est périodique, de période $T > 0$, alors f^* admet une limite quand $x \to +\infty$ puis donner une expression de cette limite en fonction de T et de $\int_0^T f(x)dx$.

Partie III – Inégalité de Hardy

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\int_0^x (f^*)^2(t)dt \leq 4\int_0^x f^2(t)dt.$$

↷

Problème – Indice d'un lacet

Un lacet sur $[a,b]$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Pour tout lacet γ sur $[a,b]$ et $z_0 \notin \gamma([a,b])$, on définit l'indice de γ relativement à z_0 comme le complexe

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt.$$

Partie A – Premières propriétés

1. Calculer $I(\gamma, 0)$ pour le lacet

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{int} \end{array} \right.$$

Considérons désormais un lacet γ et $z_0 \notin \gamma([a,b])$.

2. Étudier la fonction $t \mapsto \frac{1}{\gamma(t)-z_0} \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0} du\right)$ sur $[a,b]$, puis en déduire que $I(\gamma, z_0)$ est un entier.
3. (a) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $|\gamma(t) - z_0| > 2r$ pour tout $t \in [a,b]$.
   (b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < r$ (donc $z \notin \gamma([a,b])$), montrer que

$$|I(\gamma, z) - I(\gamma, z_0)| \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_a^b |\gamma'(t)| dt . |z - z_0|$$

   (c) Conclure que la fonction $z \mapsto I(\gamma, z)$ est constante sur tout segment ne rencontrant pas $\gamma([a,b])$.
4. Considérons U une partie de $\mathbb{C}$, $\omega \in U$ et $z_0 \notin U$ tels
   ▷ Le lacet γ est à valeur dans U.
   ▷ Pour tout $t \in [a,b]$, le segment joignant $\gamma(t)$ à ω est dans U.
   ▷ Il existe $r > 0$ tel que le disque de centre z_0 et de rayon r ne rencontre pas U.
   Posons pour tout $u \in [0,1]$,

$$\gamma_u : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & u\gamma(t) + (1-u)\omega \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que, pour tout $u \in [0,1]$, γ_u est un lacet et que $z_0 \notin \gamma_u([a,b])$.
   (b) Justifier que, pour tout $u \in [0,1]$ et tout $t \in [a,b]$, $|\gamma_u(t) - z_0| \geq r$.
   (c) Montrer que pour tout $u, v \in [0,1]$

$$|I(\gamma_u, z_0) - I(\gamma_v, z_0)| \leq \frac{|z_0 - \omega|}{2\pi r^2} \int_a^b |\gamma'(t)| dt . |u - v|.$$

   (d) En déduire que $u \mapsto I(\gamma_u, z_0)$ est continue.
   (e) Calculer $I(\gamma, z_0) (= I(\gamma_1, z_0))$.
5. Déterminer $I(\gamma, z_0)$ pour tout z_0 et le lacet

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 4\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} e^{it} & \text{si } t \leq 2\pi, \\ 2e^{it} - 1 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On pourra présenter le résultat sous forme d'un schéma indiquant les valeurs de l'indice selon les zones du plan complexe.

Partie B – Indice de lacets proches

Considérons deux lacets γ et η définis sur $[a,b]$ et $z_0 \notin (\gamma([a,b]) \cup \eta([a,b]))$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \qquad |\gamma(t) - \eta(t)| < |\eta(t) - z_0|.$$

1. Montrer que $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{\gamma(t)-z_0}{\eta(t)-z_0} \end{array} \right.$ est un lacet dont l'image est incluse dans un disque de centre 1 et ne contenant pas 0.
2. Exprimer $I(\theta, 0)$ en fonction de $I(\gamma, z_0)$ et $I(\eta, z_0)$.
3. En déduire que $I(\gamma, z_0) = I(\eta, z_0)$.

Partie C – Théorème de D'Alembert-Gauss

Soit P un polynôme complexe non constant. Supposons que P n'admette pas de racine sur $\mathbb{C}$. Considérons, pour tout $r \geq 0$, le lacet

$$\gamma_r : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & P(re^{it}). \end{array} \right.$$

1. Soit M une constante positive fixée. Montrer que, pour tout $r, r' \leq M$, il existe une constante C telle que

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)| \leq C|r - r'|.$$

2. En déduire que si r et r' sont des réels positifs suffisamment proches, alors $I(\gamma_r, 0) = I(\gamma_{r'}, 0)$.
   Indication: on pourra utiliser les résultats de la partie B.
3. Conclure que $r \mapsto I(\gamma_r, 0)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $I(\gamma_r, 0)$.
   Indication: on introduira le lacet $\eta_r : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a_n(re^{it})^n \end{array} \right.$ où n désigne le degré $\deg P$ et a_n est le coefficient dominant de P.
5. Conclure.

↷

Partie D – Formule des résidus de Cauchy

Soit F une fraction rationnelle et γ un lacet sur $[a,b]$ tel qu'aucun pôle de F n'appartienne à $\gamma([a,b])$.

1. Déterminer $\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.
2. Notons $(z_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ les pôles de F et $Res(F,z_k)$ le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{z-z_k}$ dans la décomposition de F.
   Montrer que
   $$\int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt = 2i\pi\sum_{k=1}^{N} I(\gamma,z_k)Res(F,z_k).$$
3. Calculer (avec la méthode précédente) $\int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ pour $F(X)=\frac{1}{1+X^2}$ et
   $$\gamma : \left\{\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} Re^{it} & \text{si } t\leq\pi, \\ R\cos(t) & \text{sinon.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$
   En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.
4. Expliquer comment calculer $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$.

↷

Cours

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Problème – Approximation par convolution

Définition 3

▷ *Une fonction f à valeurs réelles est à support compact si l'ensemble*

$$\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\},$$

appelé support de f, est borné.
▷ *Une fonction test est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact.*

Définition 4

Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si toute suite convergente à valeurs dans F a sa limite dans F. Le complémentaire d'une partie fermée est appelé partie ouverte.

Les parties B et C sont totalement indépendantes.

Partie A – Produit de convolution

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à support compact et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définissons

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \qquad g \star f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt.$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $f \star g(x)$ et $g \star f(x)$ sont bien définies et égales.

   (b) Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer sa dérivée.
   Indication: on pourra remarquer que si $|x| \leq \alpha$ et $\mathrm{Supp}(f) \subset [-A, A]$, alors

$$f \star g(x) = \int_{-\alpha-A}^{\alpha+A} g(t)f(x-t)dt.$$

   (c) En déduire que, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Partie B – Séries de Fourier

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, 2π-périodique, on définit le coefficient d'indice $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

et la somme de Fourier d'indice $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi]$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$. Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}dt = 0.$$

   Indication: on pourra commencer par vérifier ce résultat pour f en escalier.
4. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en dehors de $[0, 2\pi]$, continue par morceaux telle que, pour toute fonction f continue par morceaux, 2π-périodique,

$$S_n(f) = D_n \star f.$$

   (b) Calculer $D_n \star 1$; en déduire $\int_0^{2\pi} D_n(t)dt$.
   (c) Vérifier que, pour toute fonction f continue par morceaux, 2π-périodique,

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2}dt.$$

5. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique, et $x \in \mathbb{R}$ où f est continue. Montrer, avec la question précédente, que la suite $(S_n(f)(x))_n$ converge vers $f(x)$ (Théorème de Dirichlet).
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{S}_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

↷

(a) Montrer que

$$\widetilde{S}_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \sin^2\frac{(n+1)t}{2} dt.$$

(b) En déduire que la suite de fonctions $(\widetilde{S}_n(f))_n$ converge uniformément vers f (Théorème de Fejer).

Partie C – Suite régularisante

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n de degré $2n$ telle que

   $$\forall x > 0, \qquad g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

   (b) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit h la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = g((1-x)(1+x))$.

   (a) Montrer que h est une fonction test et préciser $\mathrm{Supp}(h)$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de h.

   (c) Vérifier que $\int_{-1}^{1} h(t)dt > 0$.

3. Définissons la fonction ρ par $\rho(x) = \frac{1}{\int_{-1}^{1} h(t)dt} h(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ρ_n est une fonction test, positive ; déterminer l'intégrale de ρ_n sur $\mathrm{Supp}(\rho_n)$.

4. Dans cette question, on utilise la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ introduite dans la question précédente et f une fonction continue à support compact.

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|f \star \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t)dt.$$

   (b) En déduire que la suite $(f \star \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.

   (c) Conclure que f est limite uniforme d'une suite de fonctions tests.

5. (a) Montrer que l'ensemble des zéros d'un fonction continue est une partie fermée.

   (b) i. Montrer que le complémentaire d'un intervalle ouvert $]a, b[$ est un fermé puisqu'il est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   ii. Montrer qu'une partie fermé de $\mathbb{R}$ est le complémentaire d'une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

   iii. Démontrer que toute partie fermée est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (théorème de Whitney).

↷

$\zeta(2)$ and friends

Préliminaires

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ la n-ème somme partielle de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la n-ème somme partielle de la série de terme général $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_n$ diverge.
2. Justifier précisément que la suite $(S_n)_n$ converge.
   Notons $\zeta(2)$ la limite de cette suite.
3. En étudiant la suite $(T_n = S_n + \frac{1}{n})_n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \zeta(2) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

Partie A – $\zeta(2)$ et des polynômes de Tchebytchev

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sin((2n+1)\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cos^{2(n-k)}\theta \sin^{2k+1}\theta.$$

   (b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin^{2n+1}\theta \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k (\operatorname{cotan}^2\theta)^{n-k}.$$

   On rappelle que $\operatorname{cotan} = \frac{1}{\tan}$.

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}.$$

   (a) Calculer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1})$.

   (b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$; en déduire que P est scindé à racines simples.

   (c) Déterminer la somme des racines du polynôme P.

   (d) En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3};$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n \leq \frac{2n(n+1)}{3}$$

   (c) En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

4. En déduire les sommes des séries de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$, $\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Partie B – $\zeta(2)$ et des intégrales de Wallis

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t dt, \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n.$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

   (b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.

   (c) Conclure que $J_0 - K_n = \frac{\pi}{4} S_n$.

4. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}, \qquad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

   (c) Retrouver $\zeta(2)$.

↷

Partie C – $\zeta(2)$ et le noyau de Dirichlet

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_n(x) = \frac{1}{2}.\frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = \int_0^\pi tD_n(t)dt$.
   (a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi t\cos ktdt$.
   (b) En déduire que
$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - S_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

3. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ l'unique fonction continue vérifiant

$$\forall x \in]0, \pi], \qquad f(x)\sin\frac{x}{2} = x.$$

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
4. Montrer que si $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$

5. (a) Conclure que $\lim L_n = 0$.
   (b) Retrouver $\zeta(2)$.

Partie D – Calcul d'une somme double

Dans cette partie, on utilisera la valeur de $\zeta(2)$ obtenue précédemment.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_k}{k(k+1)} = S_n - \frac{H_n}{n}.$$

   (b) En déduire que la série de terme général $\frac{H_n}{n(n+1)}$ est convergente et préciser sa somme.

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \geq 2$,

$$Z_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+m-1)}.$$

   (a) Montrer que

$$Z_{n,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} + H_n - H_{n+m-1}\right).$$

   (b) En déduire que $\lim\limits_n Z_{n,m} = \frac{1}{m-1}H_{m-1}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $m \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{kl(k+l-1)} = S_n + \sum_{l=2}^{m} \frac{Z_{n,l}}{l}.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_m \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{1}{kl(k+l-1)}$.

↷

Problème – Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$

▷ Le conjugué d'une permutation ρ par une permutation σ est la permutation $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$.
▷ Un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_5$ (respectivement $\mathfrak{A}_5$) est distingué dans $\mathfrak{S}_5$ (respectivement $\mathfrak{A}_5$) s'il contient tous les conjugués de ses éléments par ceux de $\mathfrak{S}_5$ (respectivement $\mathfrak{A}_5$).
Soit H un sous-groupe distingué dans $\mathfrak{S}_5$.

1. Montrer que si $H \cap \mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5$, alors $H = \mathfrak{A}_5$ ou $H = \mathfrak{S}_5$.
2. Montrer que si $H \cap \mathfrak{A}_5 = \{\mathrm{Id}\}$, alors $H = \{\mathrm{Id}\}$.
   Indication: on peut commencer par remarquer que la restriction de la signature à H est injective et en déduire que card $H \leq 2$.
3. (a) Déterminer le nombre d'éléments de chaque ordre dans $\mathfrak{A}_5$.
   (b) Montrer que si H contient un élément d'ordre 2 (respectivement 3 ou 5) de $\mathfrak{A}_5$, alors il les contient tous.
   (c) Déterminer $H \cap \mathfrak{A}_5$.
4. En déduire tous les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$.
5. Précisons le résultat de la question 3 en déterminant les sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_5$.
   Soit K un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_5$.
   (a) Montrer que si K contient un élément d'ordre 2 (respectivement 3) de $\mathfrak{A}_5$, alors il les contient tous.
   (b) Soit σ et ρ deux éléments d'ordre 5 de $\mathfrak{A}_5$. Montrer que σ est un conjugué de ρ ou de ρ^2 par un élément de $\mathfrak{A}_5$.
   En déduire que si K contient un élément d'ordre 5 de $\mathfrak{A}_5$, alors il les contient tous.
   (c) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_5$.

Problème – Cercle osculateur

Considérons M un arc paramétré birégulier, paramétré par une abscisse curviligne.

Partie A – Cercle de meilleure approximation

L'objectif de cette partie est de montrer que le cercle de courbure (donc le centre est le centre de courbure et le rayon est la valeur absolue du rayon de courbure) est le cercle approximant au mieux l'arc au voisinage du point $M(0)$, appelé cercle osculateur.
Notons $(x(s), y(s))$ les coordonnées de $M(s)$ dans le repère de Frenet $(M(0), \overrightarrow{T}(0), \overrightarrow{N}(0))$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions x et y en fonction de la courbure $\gamma(0)$ en $M(0)$.
2. (a) Déterminer les fonctions f telles que $f(X, Y) = 0$ soit l'équation d'un cercle passant par $M(0)$ et dont la tangente en $M(0)$ est la tangente à l'arc M en $M(0)$.
   (b) Préciser parmi les fonctions précédentes les fonctions f telles que $f(x(s), y(s)) = \underset{0}{o}(s^2)$.
   (c) Réconnaître le cercle correspondant.

Partie B – Monotonie du disque osculateur

Supposons que l'arc M est de plus de classe $\mathcal{C}^3$ et supposons que le rayon de courbure R est positif et décroissant sur le segment $[s_0, s_1]$.
Notons $\Omega(s)$ le centre de courbure au point $M(s)$ et $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$ la base de Frenet.

1. Déterminer la longueur de l'arc de la développée entre $\Omega(s_0)$ et $\Omega(s_1)$ en fonction de R.
2. En déduire que la longueur $\Omega(s_0)\Omega(s_1)$ est inférieure à $R(s_0) - R(s_1)$.
3. Conclure que le disque osculateur (c'est-à-dire le disque délimité par le cercle osculateur) en s_1 est inclus dans le disque osculateur en s_0.

Problème 1 – Déterminants de Smith

Pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $\sum_{d|n} f(d)$ désigne la somme des $f(d)$ sur l'ensemble des diviseurs positifs d de n. Par exemple,

$$\sum_{d|6} d^2 = 50.$$

Les résultats de la question 1 de la partie A sont nécessaires pour la partie B. On pourra le cas échéant les admettre pour avancer le devoir.

Partie A – Fonction de Mobius

1. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\mu(1) = 1$ et
$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$
   (b) Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$
   Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) = f(n).$$
   (c) Montrer que la fonction d'Euler φ vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n).$$

2. (a) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mu(p) = -1$ puis calculer $\mu(p^k)$ pour $k \geq 2$.
   (b) Comparer, pour m, $n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, les quantités $\mu(m)\mu(n)$ et $\mu(mn)$.
   (c) En déduire l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mu(n) = 1$.

Partie B – Calcul de déterminants

1. Soit $F : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. Posons $A_F = (F(i \wedge j))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et calculons son déterminant.
   (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont le coefficient en position i, j est 1 si i divise j, et 0 sinon.
   Calculer $\det P$.
   (b) Trouver, à l'aide de la partie A, une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que
$$A_F = {}^{\mathrm{t}}P \mathrm{diag}(f(1), \ldots, f(n)) P.$$
   (c) En déduire $\det A_F$ en fonction de f.

   Les trois questions suivantes sont indépendantes entres elles mais utilisent le résultat de la question précédente.

2. Calculer le « premier déterminant de Smith » $\det(i \wedge j)_{i,j}$.
3. Définissons $f(1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(n) = \frac{1}{n} \prod_{p \in \mathcal{P}_n} (1 - p),$$
   où $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des facteurs premiers positifs de n. Posons encore F définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$
   (a) Montrer que, pour m, $n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $f(mn) = f(m)f(n)$.
   Indication: on pourra exprimer $\mathcal{P}_{mn}$ en fonction de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_n$.
   (b) En déduire que, pour m, $n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux,
$$F(mn) = F(m)F(n).$$
   Indication: on pourra commencer par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de mn.
   (c) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \frac{1}{n}$.
   (d) En déduire le $\det\left(\frac{1}{i \wedge j}\right))_{i,j}$ puis le « second déterminant de Smith » $\det(i \vee j)_{i,j}$.
4. Calculer le déterminant de la matrice dont le coefficient en position i, j est la somme des diviseurs positifs communs à i et j.

Problème 2 – Théorème de Hankel-Sylvester

Pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

- ▷ $\Delta_{i_1}^{j_1}$ le mineur de M en position i_1, j_1, c'est-à-dire le déterminant de la matrice déduite de M en supprimant la ligne d'indice i_1 et la colonne d'indice j_1 ;
- ▷ $\Delta_{i_1,i_2}^{j_1,j_2}$ le déterminant de la matrice déduite de M en supprimant les lignes d'indice i_1 et i_2 et les colonnes d'indice j_1 et j_2.

Partie A – Formule de condensation de Desnanot-Jacobi

Dans cette partie, on cherche à montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous $i \neq j$,

$$\det M.\Delta_{i,j}^{i,j} \quad = \quad \Delta_i^i \Delta_j^j - \Delta_i^j \Delta_j^i. \tag{1}$$

1. Rappeler l'expression de la matrice $M.{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)$.
2. Pour tout $i \neq j$, notons $M_{i,j}$ la matrice déduite de I_n où les colonnes d'indices i et j ont été remplacées par les colonnes correspondantes de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)$.
   (a) Exprimer le déterminant de $M_{i,j}$ en fonction de Δ_i^i, Δ_j^j, Δ_i^j et Δ_j^i.
   (b) Calculer le produit matriciel $M.M_{i,j}$.
   (c) Calculer $\det(M.M_{i,j})$.
   (d) En déduire la formule (1) dans le cas où M est inversible.
3. Déduire la formule (1) dans le cas général en considérant la matrice $M + x\mathrm{I}_n$ et en faisant tendre x vers 0.

Partie B – Déterminants de Sylvester-Hankel

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$, définissons le n-ème déterminant de Sylvester $S_n(f)$ comme la fonction qui asssocie, à tout $x \in I$, le déterminant de la matrice $(f^{(i+j-2)})_{i,j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

1. Calculer les déterminants de Sylvester pour $f = \exp$.
2. Calculer le n-ème déterminant de Sylvester pour $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} a_k e^{\alpha_k x}$ avec $a_1, \ldots, a_{n+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$.
   Indication: on pourra reconnaître un produit matriciel et exprimer le résultat à l'aide du déterminant de Vandermonde de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$. Posons $M = (f^{(i+j-2)})_{i,j \leq n+2} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{C})$, Δ_i^j les mineurs de M.
   (a) Montrer que $(S_n f)' = \Delta_{n+1}^{n+2} = \Delta_{n+2}^{n+1}$ et que $(S_n f)'' = \Delta_{n+1}^{n+1}$.
   (b) Déduire de la Partie A que
   $$S_{n+1}f.S_{n-1}f = S_n f.(S_n f)'' - (S_n f)'^2.$$
4. Montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^{2n}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, homogène à coefficients constants si et seulement si la fonction $S_n f$ est identiquement nulle.
5. Déterminer les déterminants de Sylvester pour $f : x \mapsto 3\cos(2x) - 5\sin(2x)$.

↷

Exercice 1 – Déterminant anti-circulant

Soit $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$; le but de cet exercice est le calcul du déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont $a_{i,j} = b_k$ si $i + j - 1 = k[n]$.
Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $u_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ pour tous $i, j \leq n$ et $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k z^{k-1}$.

1. a. Calculer les coefficients de AU à l'aide de la fonction φ.

b. En déduire que $\det A = \epsilon . \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi(\omega^{k-1})$ où ϵ est un signe à déterminer en fonction de la parité de n.

2. Calculer φ puis $\det A$ dans les cas suivants :

a. $b_k = a^{k-1}$ | **b.** $b_k = \binom{n-1}{k-1}$

Problème

Le but de ce problème est de montrer la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer les applications et généralisations.

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On note $M_{i,j}$ le coefficient de M qui se trouve sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- On note ${}^tM$ sa transposée définie par ${}^tM_{i,j} = M_{j,i}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- On note $\det(M)$ son déterminant.
- Pour $n \geq 2$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- Plus généralement, soir $r \geq 0$.
  Pour $n \geq r+1$ et $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$, vérifiant $i_k \neq i_l$ et $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, on note $[M]_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_r}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant les lignes d'indices $i_1, \dots, i_r$ et les colonnes $j_1, \dots, j_r$. On conviendra que cette matrice vaut M si $r = 0$.
- On note $\mathrm{com}(M)$ la comatrice de M définie par

$$\mathrm{com}(M)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det[M]_i^j$$

- On désignera par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

A – Préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Montrer que l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(M) = \sup_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |M_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, on rappelle qu'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles $n \times n$) telles que $M = P.J.Q$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & (0) & & \\ & & 1 & & & \\ & (0) & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

J étant une matrice *diagonale* dont les r premiers éléments *diagonaux* valent 1 et dont les $n - r$ derniers éléments diagonaux valent 0. Si $J = 0$, on convient que $r = 0$.

2. Rappeler l'interprétation de r.

3. On conserve les notations de la question précédente. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lim_{k \to +\infty} P.J_k Q$ au sens de la distance associée à la norme N.

4. Montrer que le déterminant définit une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la distance associée à la norme N, dans $\mathbb{R}$ (on pourra écrire le déterminant comme une somme de fonctions toutes en forme de produits).

B – Formule de condensation

On se propose de montrer dans cette partie la formule de Desnanot-Jacobi, dite de *condensation*, suivante où n est un entier ≥ 3 :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) \det[M]_{1,n}^{1,n} = \det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_n^1 \det[M]_1^n \qquad (1)$$

5. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Calculer

$$M_{i,1} \det[M]_i^1 - M_{i,2} \det[M]_i^2 + \dots + (-1)^{n-1} M_{i,n} \det[M]_i^n$$

en fonction de $\det(M)$ et de i.

6. Montrer que

$$M_{j,1} \det[M]_i^1 - M_{j,2} \det[M]_i^2 + \dots + (-1)^{n-1} M_{j,n} \det[M]_i^n = 0$$

↷

pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, vérifiant $i \neq j$. (On interprètera le membre de gauche comme le développement par rapport à une ligne du déterminant d'une certaine matrice).

7. *Déduire des deux questions précédentes* le fait que $M.{}^t\mathrm{com}(M) = xI_n$ où x est un nombre réel que l'on précisera.

On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M^* = \begin{pmatrix} \det[M]_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ -\det[M]_1^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\ \det[M]_1^3 & 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 & \det[M]_n^n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, M^* est obtenue à partir de ${}^t\mathrm{com}(M)$ en remplaçant, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et chaque $j \in \{2, \dots, n-1\}$ le coefficient ${}^t\mathrm{com}(M)_{i,j}$ par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.

8. Calculer $\det(M^*)$ en fonction de $\det[M]_1^1$, $\det[M]_n^n$, $\det[M]_n^1$ et $\det[M]_1^n$.

9. Ecrire le calcul explicite de la matrice produit $M.M^*$ sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.

10. En utilisant la question précédente, démontrer (1) dans le cas où M est inversible.

11. Démontrer (1) dans le cas où M n'est pas inversible.

C – Algorithme de Lewis Carroll

Le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll, s'est servi de la formule de condensation (1) pour mettre au point un algorithme de calcul de déterminant $n \times n$, n'utilisant que des déterminants 2×2.

L'algorithme fonctionne comme suit.

On doit trouver le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$.

Pour cela, on met en jeu une suite de couples de matrices $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n-2$ définies comme suit.

Pour $k = 0$, $A^{(0)} = A$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Voici comment l'on passe du couple $(A^{(k)}, B^{(k)})$ $(k \leq n-3)$ au couple $(A^{(k+1)}, B^{(k+1)})$. Si aucun des coefficients de $B^{(k)}$ n'est nul (ce qui est le cas pour $B^{(0)}$) alors on pose

$$A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}, \ i, j \in \{1, \dots, n-k-1\}$$

$$B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \ i, j \in \{1, \dots, n-k-2\}$$

Bien entendu, dans le membre de droite qui définit le terme $A_{i,j}^{(k+1)}$, $|.|$ désigne un déterminant 2×2. Enfin, si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)})$ a pu être défini par la précédente procédure, alors on définit la matrice de taille 1×1, $A^{(n-1)} = (A_{1,1}^{(n-1)})$ par

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{1}{B_{1,1}^{(n-2)}} \begin{vmatrix} A_{1,1}^{(n-2)} & A_{1,1+1}^{(n-2)} \\ A_{1+1,1}^{(n-2)} & A_{1+1,1+1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

Notrer qu'il *n'y a pas* de terme $B^{(n-1)}$. L'algorithme se termine en affirmant que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$, on prouvera plus loin sa validité. Si l'un des coefficients de $B^{(k)}$ est nul, l'algorithme ne s'applique pas, et Lewis Carroll préconise de recommencer après avoir échangé (convenablement) des lignes dans la matrice initiale.

Exemple :

$$M = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 38 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 77 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M vaut donc 77.

12. Appliquer cet algorithme au calcul du déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'algorithme se termine sans qu'aucun des coefficients des matrices $B^{(i)}$ ne s'annule. Quel est le nombre u_n de déterminants 2×2 que l'on a calculé au cours de la procédure ?

Une autre méthode de calcul de déterminant consiste à répéter le développement suivant des lignes par cofacteurs jusqu'à ce qu'on obtienne des déterminants 2×2. L'objet de la question suivante est d'étudier le nombre v_n de déterminants 2×2 ainsi obtenus.

14. Soit donc v_n le nombre de déterminants 2×2 calculés lorsque l'on applique la méthode de développements successifs par rapport à des lignes pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$. Etablir une relation entre v_n et v_{n-1}. Puis, comparer u_n et v_n lorsque $n \to +\infty$.

↷

On se place désormais dans le cas où l'algorithme de Lewis Carroll s'applique. On se propose de montrer sa validité.

15. Soit $r, s \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. En appliquant la formule de condensation, montrer que $A_{r,s}^{(2)}$ est le déterminant d'une matrice 3×3, extraite de M, que l'on précisera.

16. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $r, s \in \{1, 2, \dots, n-k\}$. Généraliser le résultat précédent en exprimant $A_{r,s}^{(k)}$ comme le déterminant d'une matrice de taille $(k+1) \times (k+1)$ extraite de M que l'on précisera. Prouver que

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$$

ce qui établit la validité de l'algorithme

D – Le λ-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable, noté $\det_\lambda(M)$, de la manière suivante.
Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$.
Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.
On impose de plus, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de condensation suivante :

$$\det_\lambda(M) \det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n} = \det_\lambda[M]_1^1 \det_\lambda[M]_n^n + \lambda \det_\lambda[M]_n^1 \det_\lambda[M]_1^n \qquad (2)$$

Cette condition (2) permet donc de définir par récurrence la λ-déterminant pour une matrice M de taille $n \times n$, à la condition de ne pas avoir à diviser par 0 au cours de son calcul. Plus précisément, supposons que cette procédure par récurrence ait permis de définir le membre de droite de (2) ainsi que $\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$ et qu'en plus ce dernier soit non nul. Alors on définit $\det_\lambda(M)$ par (2) puisqu'on peut diviser par $\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n} \neq 0$.
Dans la suite, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda(M)$ est bien défini.

17. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On note $M_{t,j}$ la matrice obtenue à partir de M par multiplication de la j-ème colonne de M par t. Montrer que $\det_\lambda(M_{t,j})$ est bien défini et donner sa valeur en fonction de $\det_\lambda(M)$ et de t.

On considère un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les réels x_i sont tous non nuls. On introduit la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$:

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n},$$

où x_i^{j-1} est le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

18. On suppose que $x_j + \lambda x_i$ est non nul pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $1 \leq i < j \leq n$. Calculer $\det_\lambda V(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $x_j + \lambda x_i$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$. (On commencera par le cas $n = 3$, puis on procédera par récurrence sur n).

↷

Exercice – Médiatrices

Soit A et B les points du plan de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$. Tracer la médiatrice de $[A,B]$ (c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de A et B) pour les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

Exercice – Deux preuves de Kolmogorov

L'objectif de cet exercice est de deux donner deux nouvelles preuves du

Théorème 3

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ sont bornées. Alors, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange pour une telle fonction : pour tous a, $b \in \mathbb{R}$, il existe c entre a et $a+b$ tel que

$$f(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} b^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} b^{n+1}.$$

Méthode A

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_t(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} X^k$.

1. Montrer que les applications de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\|P\|_1 = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)|, \qquad \|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

   sont des normes.
2. Rappeler rapidement pourquoi ces normes sont équivalentes.
3. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|P_t\|_\infty \leq M.$$

4. Conclure.

Méthode B

Notons A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position i,j est i^j.

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!} 1^{n+1} \\ f(x+2) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(c_2)}{(n+1)!} 2^{n+1} \\ \vdots \\ f(x+n) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} n^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{f^{(1)}(x)}{1!} \\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \end{pmatrix}$$

3. Conclure.

Problème

Dans ce problème, on considère les ensembles suivants :

- ▷ E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$.
- ▷ E_1 est l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ et telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ▷ E_2 est l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose, pour $f \in E_1$, $N_1(f) = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt\right)^{1/2}$ et, pour $f \in E_2$ $N_2(f) = \left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}$.

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Partie I – Premier Exemple

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \arctan t$.

1. Montrer que f appartient à E_1.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puis que f appartient à E_2.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} H_x(t)dt$.
   (a) Montrer que la fonction φ est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle en T, $\frac{1}{(T+1)(T+x^2)}$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   (d) Déterminer la valeur de $N_2(f)$.

↷

4. Étudier le signe de l'expression $u - \arctan u$ pour $u \in \mathbb{R}_+$.
5. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\theta(x) = \int_0^{+\infty} G_x(t)dt$ et on admet que θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec : $\theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}dt$
   (a) Calculer $\theta'(x)$, puis $\theta(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Établir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.
   (c) En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II – Deuxième exemple

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

1. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. En déduire que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
2. Déterminer un équivalent de $f(t)$ en 0^+ et en $+\infty$.
3. Montrer que f appartient à E_1.
4. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.
   On note désormais $J = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2k}\ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; déterminer la valeur de $J_k = \int_0^1 t^{2k}\ln t dt$.
   (c) Montrer que la suite de fonctions $(t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} t^{2k})_n$ converge uniformément $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ sur tout segment de $]0,1[$.
   On admet l'égalité $J = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2k}\ln t dt$.
   (d) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J.
   Indication: on admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. (a) Montrer que $[N_1(f)]^2 = 2\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}dt$.
   (b) Justifier puis effectuer les changements de variable $u = f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ et $v = e^{-u}$ dans l'intégrale obtenue dans la question précédente.
   (c) En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie III – Étude de l'équivalence entre N_1 et N_2

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0. On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \frac{f(t)}{t}$.
   (a) Quelles sont les limites de $h(t)$ et de $g(t)$ en 0^+ ?
   (b) Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (c) Déterminer les limites de $\sqrt{t}g'(t)$ et de $g(t)g'(t)$en 0^+.
   (d) Établir, pour $x > 0$, la relation :
$$\int_0^x (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 dt + \frac{1}{4}\int_0^x (h(t))^2 dt \quad (2)$$
2. (a) Déduire de la relation (2) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.
   (b) En considérant la fonction sin, montrer que les ensembles E_1 et E_2 ne sont pas égaux.
3. (a) Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0. On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.
   (b) Justifier l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : t \mapsto e^{-t}\sin(nt)$.
   Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.
   (d) Conclure que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur E_2.

↷

Exercice – Polynômes homogènes

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- ▷ l'espace $\mathcal{F}_n$ des polynômes homogènes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de degré n engendré par les applications $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ telles que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$;
- ▷ l'espace $\mathcal{H}_n$ des polynômes homogènes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, harmoniques de degré n défini par :
$$\mathcal{H}_n = \{f \in \mathcal{F}_n,\ \Delta f = 0\},$$
où $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$ est le laplacien de f.

1. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $f(0,0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \in \mathcal{F}_n$. Montrer que $f \in \mathcal{F}_{n+1}$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n f(x_1, x_2, x_3)$$
   Montrer, par récurrence, que $f \in \mathcal{F}_n$.
2. Soit $n \geq 2$.
   (a) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{F}_n$, $\Delta f \in \mathcal{F}_{n-2}$.
   (b) En considérant l'application linéaire de $\mathcal{F}_n$ dans $\mathcal{F}_{n-2}$ qui à une fonction f associe son laplacien Δf, montrer que
$$\dim \mathcal{H}_n \geq \dim \mathcal{F}_n - \dim \mathcal{F}_{n-2}$$
3. (a) Soit $f \in \mathcal{H}_n$ telle qu'il existe $g \in \mathcal{F}_{n-2}$ vérifiant :
$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) g(x_1, x_2, x_3)$$
   En factorisant $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ à plusieurs reprises, montrer que $f = 0$.
   Indication: On pourra utiliser le laplacien de f.
   (b) En considérant l'application linéaire de $\mathcal{F}_{n-2}$ dans $\mathcal{F}_n$ qui à une fonction f associe la fonction $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) f(x_1, x_2, x_3)$, montrer que
$$\dim \mathcal{H}_n \leq \dim \mathcal{F}_n - \dim \mathcal{F}_{n-2}$$
4. Montrer que $\dim \mathcal{F}_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En déduire la dimension de H_n pour $n \geq 2$.

Problème – Dérivabilité de fonctions réelles

Dans ce problème, f désigne une fonction définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors $\tau_{a,b}(f)$ ou $\tau_{a,b}$ s'il n'y a pas confusion le taux d'accroissement de f entre deux réels distincts a et b du domaine de définition de f.
On rappelle que f est dérivable en a si $h \mapsto \tau_{a,a+h}(f)$ admet une limite finie en 0.

Partie A – Dérivabilité forte

La fonction f est fortement dérivable en a si $(x_1, x_2) \mapsto \tau_{x_1,x_2}(f)$ admet une limite finie en (a, a) ; on note $f^*(a)$ cette limite.

1. Posons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$,
$$f_\alpha : x \mapsto x^\alpha \sin \frac{1}{x}.$$
   (a) Montrer que f_α admet un prolongement continu en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.
   On note encore f_α ce prolongement.
   (b) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la fonction f_α est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la fonction f_α est-elle fortement dérivable en 0 ?

Revenons au cas général.

2. (a) Montrer que si f est fortement dérivable en a alors elle est dérivable au sens usuel en a et $f'(a) = f^*(a)$.
   (b) Montrer que si f est fortement dérivable sur un ouvert U alors elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
   (c) Étudier la réciproque.

Partie B – Dérivabilité au sens de Schwarz

La fonction f est dérivable au sens de Schwarz en a si $h \mapsto \tau_{a-h,a+h}(f)$ admet une limite finie en 0 ; on note $f^s(a)$ cette limite.

1. Montrer que si f est dérivable en a alors f est dérivable au sens de Schwarz en a.
   Étudier la réciproque.
2. Soit f continue sur le segment $[a, b]$, dérivable au sens de Schwarz sur $]a, b[$.
   (a) Montrer que si $f(b) > f(a)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^s(c) \geq 0$.
   (b) Montrer que si $f(b) = f(a) = 0$, alors il existe $c, d \in]a, b[$ tel que $f^s(c) \geq 0 \geq f^s(d)$.
   (c) Montrer qu'il existe $c, d \in]a, b[$ tel que $f^s(c) \geq \tau_{a,b}(f) \geq f^s(d)$.
   (d) Conclure que si f^s est bornée, alors f est lipschitzienne.
3. Soit f continue et dérivable au sens de Schwarz sur $]a, b[$. Étudier le lien entre monotonie de f et signe de f^s.
4. Déterminer une fonction f continue et dérivable au sens de Schwarz sur $]a, b[$ admettant un extremum e, $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^s(x_0) \neq 0$.
5. Soit f continue et dérivable au sens de Schwarz sur $]a, b[$ et telle que f^s est continue. Montrer que f est dérivable et que $f' = f^s$.

↷

Mines-Ponts 2009 MP

Exercice – Théorème spectral

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique ; on considère $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \langle X, SX \rangle \end{array} \right.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que S admet un vecteur propre (ce qui par récurrence permet de montrer le théorème spectral).

1. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un vecteur $X_0 \in \mathcal{S}$.
2. Soit $Y \in \mathcal{S}$ orthogonal à X_0 et

$$\varphi : t \mapsto \cos(t)X_0 + \sin(t)Y.$$

   (a) Montrer que $f \circ \varphi$ admet son maximum en 0.

   (b) En déduire que $\langle SX_0, Y \rangle = 0$.

   (c) Conclure que X_0 est un vecteur propre de S.

Problème – Groupe symplectique

Soit m un entier supérieur ou égal à 1. On note I_m la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$. On note

$$\mathrm{Sp}(2m) = \{M \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}) \mid {}^tMJM = J\}.$$

Partie A – Matrices symplectiques

1. Soit $M \in \mathrm{Sp}(2m)$. Montrer que $\det M = \pm 1$. Calculer $\det J$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(2m)$ est un sous-groupe de $GL_{2m}(\mathbb{R})$.

   (b) Donner un condition nécessaire et suffisante sur $M \in GL_2(\mathbb{R})$ pour que $M \in \mathrm{Sp}(2)$.
3. A-t-on $J \in \mathrm{Sp}(2m)$? Si $M \in \mathrm{Sp}(2m)$, a-t-on ${}^tM \in \mathrm{Sp}(2m)$?
4. Soit $M \in \mathrm{Sp}(2m)$ telle que $\det M = 1$ et $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_{2m})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

   (a) Montrer que $P_M(\lambda) = P_{M^{-1}}(\lambda)$.

   (b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $P_M(\lambda) = \lambda^{2m} P_M\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Partie B – Endomorphismes symplectiques

Soit n un entier $\geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, et on note $\langle x|y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y.

On rappelle que pour toute $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique $f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f^*(y) \rangle.$$

L'application f^* s'appelle l'adjoint de f.

On appelle forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ une application $\omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est

- ▷ bilinéaire (pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \omega(x, y)$ et $y \mapsto \omega(y, x)$ sont linéaires),
- ▷ antisymétrique (pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$),
- ▷ non dégénérée, si $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a $\omega(x, y) = 0$ alors $x = 0$.

1. (a) Soit η un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\omega(x, y) = \langle \eta(x)|y \rangle$. Montrer que ω est une forme symplectique si et seulement si η est inversible.

   (b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme η de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\omega(x, y) = \langle \eta(x)|y \rangle$. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.
2. Montrer que s'il existe une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$, alors n est pair.
   On suppose dorénavant $n = 2m$ et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est J.
3. (a) Montrer que ω définie par $\omega(x, y) = \langle j(x)|y \rangle$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On note $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer $\omega(e_k, e_l)$ pour tous $k, l \in [\![1, n]\!]$.

   (c) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et M sa matrice dans la base canonique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

      i. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\omega(f(x), f(y)) = \omega(x, y)$;

      ii. $M \in \mathrm{Sp}(n)$.

↷

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une loi de composition interne bilinéaire alternée, généralement notée $(u,v) \mapsto [u,v]$ et appelée crochet, et vérifiant pour tous $u,v,w \in V$

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0,$$

connue sous le nom d'identité de Jacobi.
On rappelle que, pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M désigne le réel $\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$ appelé trace de la matrice M ; par ailleurs, est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(AB) = (BA)$.

1. Dans une algèbre de Lie V, montrer que le crochet est antisymétrique, *i.e.* pour tous $u,v \in V$, $[u,v] = -[v,u]$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ est une algèbre de Lie.
3. Soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices de trace nulle.
   On note $I = \{(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2 \,|\, i \neq j\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Montrer que $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[A,B] = AB - BA$.
   (c) Soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1 et $F_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ pour $1 \leq i \leq 3$.
   Montrer que la famille
   $$\{E_{i,j} \,|\, (i,j) \in I\} \cup \{F_i \,|\, 1 \leq i \leq 3\}$$
   est une base de $\mathcal{G}$.
4. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace de $\mathcal{G}$ constitué des matrices diagonales.
   (a) Montrer que (F_1, F_2, F_3) est une base de $\mathcal{A}$.
   (b) Montrer que l'application $(M,N) \mapsto 2(MN)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{A}$ que l'on note désormais $\langle M|N\rangle$.
   (c) Déterminer la base orthonormée (G_1, G_2, G_3) obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à (F_1, F_2, F_3) puis exprimer les coordonnées de F_1, F_2, F_3 dans la base (G_1, G_2, G_3).
5. Pour tout $A \in \mathcal{G}$, on note ad_A l'endomorphisme de $\mathcal{G}$ donné par
   $$\mathrm{ad}_A(B) = [A,B] = AB - BA.$$
   Soit $(i,j) \in I$.
   (a) Soit M une matrice diagonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha_{i,j}(M)$ tel que $\mathrm{ad}_M(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}(M)E_{i,j}$.
   (b) Montrer que l'application $\alpha_{i,j} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\alpha_{i,j}(M)$ est une forme linéaire.
   (c) Trouver un vecteur $H_{i,j} \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{A}$, on a
   $$\alpha_{i,j}(M) = \langle H_{i,j}|M\rangle.$$
6. Un bon chemin est une application $C : t \mapsto (c_{i,j}(t))_{i,j}$ définie sur un voisinage $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de 0 et à valeurs dans $SL_4(\mathbb{R})$ telle que $C(0) = I_4$ et que chaque fonction-coefficient $c_{i,j}$ est dérivable en 0 ; pour tout bon chemin C, la matrice $(c'_{i,j}(0))_{i,j}$ des dérivées en 0 est notée $C'(0)$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices des dérivées en 0 des bons chemins,
   $$\mathcal{H} = \{C'(0) \,|\, C \text{ est un bon chemin}\}.$$
   (a) Soit C_1, C_2 deux bons chemins. Montrer que $C_1C_2 : t \mapsto C_1(t)C_2(t)$ est un bon chemin et calculer sa matrice des dérivées en 0. En déduire que $\mathcal{H}$ est stable par addition.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Lie pour le crochet défini à la question 3(b).
   Indication: on pourra commencer par montrer que pour tout $G \in SL_4(\mathbb{R})$ et tout $M \in \mathcal{H}$, $GMG^{-1} \in \mathcal{H}$.
   (d) Montrer que $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ introduite à la question 3.
   Indication: on pourra utiliser les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

↷

Dans tout ce problème, on considère un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$; on note $\langle\ ;\ \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\ \|$ la norme associée.
On définit pour tout famille $x_1, \ldots, x_p$ de vecteurs de E, la matrice de Gram $G(x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ comme la matrice dont le coefficient en position (i, j) est $\langle x_i; x_j \rangle$.

Partie I – Premiers résultats

Dans cette partie, on redémontrera toutes les propriétés utilisées sur les matrices ou déterminants de Gram.

1. (a) Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tXX = 0$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer successivement que $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}A$ et que $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.
2. Soit $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E et A la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base orthonormée de E.
   (a) Donner, sans justification, la taille de la matrice A.
   (b) Montrer que $G(x_1, \ldots, x_p) = {}^tAA$.
   (c) En déduire que le rang de la matrice $G(x_1, \ldots, x_p)$ est égal au rang de la famille $x_1, \ldots, x_p$.
3. On suppose dans cette question que $p = n$.
   (a) Justifier que la famille $x_1, \ldots, x_p$ est une base si et seulement si $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $x_1, \ldots, x_p$ est une base si et seulement si $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) > 0$.
4. On définit l'angle géométrique entre deux vecteurs non-nuls u et v comme l'unique réel $\alpha \in [0, \pi[$ vérifiant :
$$\cos\alpha = \frac{\langle u; v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$
   Soit A, B, C trois points de la sphère de $\mathbb{R}^3$ centrée en $(0, 0, 0)$ et de rayon 1. Notons α, β et γ les angles géométriques des couples de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ respectivement.
   Montrer, à l'aide d'une matrice de Gram, l'inégalité suivante :
$$1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$
   À quelle condition géométrique a-t-on égalité ?
5. Considérons (x, y) une famille libre de deux vecteurs de E et notons z la projection orthogonale de x sur la droite engendrée par y.
   (a) Montrer que $\det(G(x, y)) = \det(G(x - z, y))$.
   (b) Soit A, B, C trois points non-alignés de $\mathbb{R}^2$. Déduire de la question précédente que l'aire du triangle ABC vaut
$$\frac{1}{2}\sqrt{\det G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

Partie II – Points équidistants sur une sphère

Une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ de vecteurs distincts de E vérifie la propriété $\mathcal{P}(m, t)$ si :
▷ $\forall i \leq m, \qquad \|x_i\| = 1$
▷ $\forall i \neq j \leq m, \qquad \langle x_i; x_j\rangle = t$

1. (a) Justifier rapidement que le polynôme caractéristique de matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est égal à :
$$(-1)^m X^{m-1}(X - m)$$
   (b) En déduire l'expression de $\det(G(x_1, \ldots, x_m))$ lorsque $(x_1, \ldots, x_m)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}(m, t)$.
   (c) Conclure que s'il existe une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}(m, t)$, alors
$$-\frac{1}{m-1} \leq t \leq 1$$
2. Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille qui vérifie la propriété $\mathcal{P}(m, t)$.
   (a) Montrer que si $(x_1, \ldots, x_m)$ est libre alors $m \leq n$ et $t \notin \left\{-\frac{1}{m-1}, 1\right\}$.
   (b) Montrer que si $(x_1, \ldots, x_m)$ est liée alors $m \leq n + 1$ et $t = -\frac{1}{m-1}$.
   Indication: on montrera que $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ est libre.
   (c) Peut-on trouver cinq vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui deux à deux forment le même angle ?
   (d) Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui satisfont la propriété $\mathcal{P}(3, t)$.
   Faire un dessin.
3. Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer qu'il existe trois vecteurs y_1, y_2, y_3 de $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ qui forment une famille vérifiant $\mathcal{P}(3, -\frac{1}{2})$.
   (b) Soit $t \in]-\frac{1}{2}, 1[$. Posons $a = \sqrt{\frac{2(1-t)}{3}}$, $b = \sqrt{\frac{2t+1}{3}}$ et pour tout $i \leq 3$, $x_i = ay_i + bu$.
   Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est libre et vérifie $\mathcal{P}(3, t)$.

↷

Partie III – Théorèmes d'Apollonius

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et φ une forme bilinéaire symétrique, on définit la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{B}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $\varphi(e_i, e_j)$. On remarquera par exemple que la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de Gram $G(e_1, \dots, e_n)$.
On précise, de plus, que si S désigne la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{B}$ et X, Y les matrices colonnes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y, alors $\varphi(x, y) = {}^{\mathrm{t}}XSY$.

1. Soit $(\ ;\ )$ un second produit scalaire sur E, $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux bases orthonormées pour ce produit scalaire, P la matrice de passage de $(a_1, \dots, a_n)$ à $(b_1, \dots, b_n)$.
   (a) Montrer que $G(b_1, \dots, b_n) = P^{-1}G(a_1, \dots, a_n)P$.
   On rappelle que les matrices de Gram sont définies pour le produit scalaire $\langle\ ;\ \rangle$.
   (b) Justifier que $\sum_{i=1}^{n} \langle a_i; a_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i; b_i\rangle$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
   (a) Rappeler la nature de la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) On définit l'application $(u; v) = \frac{u_1v_1}{a^2} + \frac{u_2v_2}{b^2}$ où $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$. Montrer que $(\ ;\ )$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$. Notons D le droite parallèle à la tangente en M_0 qui passe par O et M_0' un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont orthogonaux pour $(\ ;\ )$.
   (d) Soit M et M' deux points de $\mathcal{C}$ qui satisfont $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = 0$ et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{OM'}) = 1$.
      i. Montrer que $\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{OM'}\|^2 = a^2 + b^2$.
      On rappelle que la norme $\|\ \|$ est associée au produit scalaire $\langle\ ;\ \rangle$.
      ii. Montrer que l'aire du triangle de sommets O, M, M' est égale à $\frac{1}{2}|ab|$.