Devoir n° 8

Vissages

1 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct. Soit v la transformation définie par $v\left(M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.\right) = M' \left| \begin{matrix} x' = y + a \\ y' = z + b \\ z' = x + c \end{matrix}\right.$ (où a, b et c sont trois constantes). Montrer que v est un déplacement, et déterminer ses points fixes éventuels en fonction de a, b et c.

2 Dans le cas où v possède des points fixes, rappeler pourquoi v est une rotation, et la caractériser complètement (axe et angle θ)

3 Soit $t_{\mathbf{u}}$ la translation de vecteur $\mathbf{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$. Montrer qu'on peut écrire v sous la forme $t_{\mathbf{u}} \circ r$, où r est une rotation que l'on explicitera.

4 Plus généralement, montrer qu'il existe une translation t de vecteur $\mathbf{w}$, et une rotation r, telle que $v = t \circ r$, et que Δ, l'axe de r, admette $\mathbf{w}$ pour vecteur directeur (on déterminera $\mathbf{w}$ et Δ en fonction de a, b et c). On dira que v est un *vissage* d'axe Δ, d'angle θ et de translation $\mathbf{w}$. Préciser comment orienter θ.

Plus généralement encore, on dit que l'isométrie f est un *vissage* d'axe Δ, d'angle θ et de vecteur de translation $\mathbf{w}$, si $f = t_{\mathbf{w}} \circ \mathrm{Rot}(\Delta, \theta)$, et si $\mathbf{w}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\Delta}$. Le but des deux questions suivantes est de montrer que tout déplacement f de $\mathcal{E}$ est un vissage.

5 Montrer d'abord que si f est une translation ou une rotation, f est un vissage (on dit qu'il est «dégénéré»). Soit A un point quelconque de $\mathcal{E}$. Si $f(A) = B$, soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$; montrer que $t \circ f$ est une rotation ou l'identité de $\mathcal{E}$.

6 Soit alors $\mathcal{P}$ un plan orthogonal à l'axe de la rotation déterminée en **5**. Montrer que l'image de $\mathcal{P}$ par f est un plan $\mathcal{Q}$ parallèle (ou confondu) à $\mathcal{P}$. Soit $\mathbf{w}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, tel que $\mathcal{P} = t_{\mathbf{w}}(\mathcal{Q})$. Montrer que la transformation $t_{\mathbf{w}} \circ f\Big|_{\mathcal{P}}$ est une rotation du plan $\mathcal{P}$ (de centre I), et en déduire que f est un vissage d'axe $(I, \mathbf{w})$ et de vecteur de translation $\mathbf{w}$. Conclure, en n'oubliant pas les cas dégénérés.

7 Montrer que l'axe d'un vissage f est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à l'axe de $\overrightarrow{f}$, la rotation vectorielle associée à f. Utiliser cette méthode pour déterminer complètement la nature de la transformation

$$f : M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \mapsto M' \left| \begin{matrix} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{matrix}\right.$$

(vissage dont on donnera l'axe, l'angle et le vecteur de translation; on commencera, évidemment, par vérifier que f est un déplacement)