Corrigé du devoir n° 8 (vissages)

L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, et on identifie $\mathbf{u} = X\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{\jmath} + Z\overrightarrow{k}$ au vecteur-colonne $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

1 ν est une transformation affine ; $\overrightarrow{\nu}$ (l'application linéaire associée) a pour matrice (dans la base orthonormée directe associée au repère) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on vérifie aisément que ${}^tMM = I_3$ (ν est donc une isométrie) et que $\det M = 1$ (ν est donc un déplacement). Si $A \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$ est un point fixe de ν, c'est donc que $x = y + a$, $y = z + b$ et que $z = x + c$; si $a + b + c \neq 0$, ce système n'a pas de solution ; si $a + b + c = 0$, l'ensemble des points fixes est l'intersection des deux plans $x = y + a$ et $y = z + b$, soit la droite $M_t \left| \begin{matrix} a + b + t \\ b + t \\ t \end{matrix} \right.$ passant par le point $M_0 \left| \begin{matrix} a + b \\ b \\ 0 \end{matrix} \right.$ et de vecteur directeur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 On sait, d'après le cours, que si $a + b + c = 0$, ν est une rotation (on vient d'en déterminer l'axe) ; le calcul d'angle peut se faire par la méthode qui sera rappelée en **6**, mais on peut aussi remarquer que $\nu^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, ce qui montre que l'angle vaut $\pm 2\pi/3$; prenant le vecteur $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (qui est orthogonal à $\mathbf{u}$), on a $\mathbf{w}' = \overrightarrow{\nu}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{u}$ ce qui montre que l'angle vaut $-2\pi/3$.

3 Prenons pour r une rotation correspondant à a' et b' quelconques, et $c' = -a - b$, et pour t la translation de vecteur $k\mathbf{u}$. Les formules de la transformation $t \circ r$ sont donc $x' = y + a' + k$, $y' = z + b' + k$ et $z' = x + k - a' - b'$. Par identification, on aura donc $\nu = t \circ r$ si $a = a' + k$, $b = b' + k$ et $c = k - a' - b'$; et ce système possède la solution $k = (a + b + c)/3$, $a' = (-2a + b + c)/3$, $b' = (a - 2b + c)/3$ (et $c' = (a + b - 2c)/3$). La rotation r est donc définie (d'après les calculs faits en **1**) par son axe $\Delta = (M_0, \mathbf{u})$, avec $M_0 \left| \begin{matrix} \frac{-a-b+2c}{3} \\ \frac{a-2b+c}{3} \\ 0 \end{matrix} \right.$, et son angle $\theta = -2\pi/3$.

4 Si f est une translation, on peut prendre pour Δ n'importe quel axe de direction parallèle à celle de la translation, et pour angle $\theta = 0$. Si f est une rotation, on peut prendre pour t la translation de vecteur nul (qui appartient à $\overrightarrow{\Delta}$). Dans le cas général, la transformation $g = t \circ f$ est le composé de deux déplacements ; c'est donc un déplacement ; comme $g(A) = t_{\overrightarrow{AB}}(f(A)) = t_{\overrightarrow{AB}}(B) = A$, g est un déplacement admettant un point fixe ; c'est donc (d'après le cours) une rotation d'axe Δ passant par A.

5 Soit $\mathcal{P}$ un plan orthogonal à Δ; on a donc $f(\mathcal{P}) = (t^{-1} \circ g)(\mathcal{P})$; or $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, et l'image d'un plan $\mathcal{P}$ par une translation est un plan $\mathcal{Q}$ parallèle (ou confondu) ave $\mathcal{P}$. On peut facilement trouver un vecteur $\mathbf{w}$ orthogonal à $\mathcal{P}$ et tel que $\mathcal{P} = t_{\mathbf{w}}(\mathcal{Q})$ (poser $\{A\} = \mathcal{P} \cap \Delta$, $\{B\} = \mathcal{Q} \cap \Delta$, et $\mathbf{w} = \overrightarrow{BA}$), et on aura alors $t_{\mathbf{w}} \circ f(\mathcal{P}) = t_{\mathbf{w}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$; $\mathcal{P}$ étant (globalement) invariant par l'isométrie $t_{\mathbf{w}} \circ f$, on voit que $t_{\mathbf{w}} \circ f\Big|_{\mathcal{P}}$ est une isométrie de $\mathcal{P}$; orientant $\mathcal{P}$ à l'aide de Δ, on voit que c'est un déplacement, donc une rotation de $\mathcal{P}$ de centre I (ce ne peut pas être une translation, car f en serait une aussi). Ainsi, la transformation, restreinte au plan $\mathcal{P}$, est un vissage d'axe parallèle à Δ, passant par I, d'angle α, de vecteur de translation $\mathbf{w}$. Il ne reste plus qu'à montrer que ce résultat est valable dans tout plan. L'application vectorielle $\overrightarrow{f}$ associée à f étant une rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle α, soit I′ le point de $\mathcal{P}'$ centre de la rotation $t_{\mathbf{w}'} \circ f\Big|_{\mathcal{P}'}$; on aura donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{II'}) = \mathbf{w}' - \mathbf{w} + \overrightarrow{II'}$, ce qui montre que $\overrightarrow{II'} \in \overrightarrow{\Delta}$, et donc que (II′) est parallèle à Δ (donc orthogonal à$\mathcal{P}$), et le même raisonnement prouve que $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. Finalement, tout déplacement de l'espace est donc un vissage (éventuellement dégénéré).

6 Si M est sur l'axe du vissage, on a vu que $\overrightarrow{Mf(M)} = \mathbf{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Delta}$; réciproquement, si M n'est pas sur l'axe, on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \mathbf{w} + \overrightarrow{Mr(M)}$, et comme $\overrightarrow{Mr(M)}$ est orthogonal à Δ, il en résulte qu'alors $\overrightarrow{Mf(M)}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{\Delta}$. Étudions alors la transformation f. C'est une transformation affine, de matrice associée $F = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; et on vérifie aisément que F est une matrice orthogonale (${}^tFF = I_3$) de déterminant 1, donc que f est un déplacement. Déterminons la direction de l'axe du vissage : il n'est pas nécessaire de diagonaliser F, puisqu'on sait que 1 est valeur propre; il suffit de chercher les $\mathbf{v}$ tels que $\overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, donc de résoudre $\begin{cases} -2x - y + 2z = 3x \\ 2x - 2y + z = 3y \\ x + 2y + 2z = 3z \end{cases}$, de solution $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 3a \end{pmatrix}$. Cherchons à présent l'angle de la rotation, en prenant pour vecteur directeur de l'axe le vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; comme $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$, il sufit de déterminer l'angle (orienté) $(\widehat{\mathbf{v}, \overrightarrow{f}(\mathbf{v})})$, or $\mathbf{v}' = \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, et comme $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = (||\mathbf{v}||^2 \sin\alpha)\mathbf{u}/||\mathbf{u}||$, on obtient finalement $\alpha = \arcsin(\sqrt{11}/6)$. La méthode précédente amène à chercher les points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à $\mathbf{u}$; posant les équations correspondantes, on aboutit au système $\begin{cases} -5x - y + 2z + 3 = k \\ 2x - 5y + z + 3 = k \\ x + 2y - z + 9 = 3k \end{cases}$, de solution la droite passant par O ($x = y = z = 0$ et $k = 3$) et de vecteur directeur $\mathbf{u}$, comme on pouvait s'y attendre; cette droite est donc l'axe du vissage. Comme $f(O) = O'$ tel que $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}$, on voit que $\mathbf{u}$ est le vecteur de translation du vissage, ce qui, en revanche, est une simple coïncidence.