Devoir n° 6

Puissances de matrices

On se place dans ce problème dans un anneau $(A, +, \star)$ quelconque, mais on ne s'intéressera plus à partir de la question **4** qu'à l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$ des matrices carrées réelles d'ordre n, qu'on notera simplement $\mathcal{M}_n$. Pour tout élément x de A, et tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note x^k le «produit» $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{k \text{ fois}}$ (plus précisément, x^k est défini par récurrence par $x^1 = x$ et $x^{n+1} = x^n \star x$) ; on adopte de plus la convention $x^0 = 1_A$. On dit qu'un élément x de A est *nilpotent* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $x^k = 0_A$, et qu'il est *unipotent* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $x^k = 1_A$.

1 Traduire ces définitions dans le langage des matrices : quand dira-t-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est nilpotente ? Quand dira-t-on qu'elle est unipotente ? (on rappelle que O_n et I_n désignent respectivement les matrices nulle et unité de $\mathcal{M}_n$).

2 Montrer que tout élément unipotent est inversible, et qu'aucun élément nilpotent ne l'est.

3 Montrer que si y est inversible, et si x est idempotent ou nilpotent, $y \star x \star y^{-1}$ est (respectivement) idempotent ou nilpotent.

4 Expliciter les matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 qui sont unipotentes ou nilpotentes (on commencera par déterminer les éléments de la diagonale). Cette analyse se généralise-t-elle au cas des matrices de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$?

5 La question précédente permet d'obtenir (dans $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))$ certaines solutions de l'équation $X^2 = O_2$. Calculer alors $(X + aI_2)^2$ (où a est une constante réelle); en déduire une famille de solutions de l'équation $Y^2 = 2Y$. Réciproquement, peut-on, à partir d'une solution de cette équation, obtenir une matrice nilpotente ?

6 Soit A une matrice (nilpotente) telle que $A^3 = O_n$. Montrer qu'on peut écrire $(I_n + A)^k$ sous la forme $I_n + a_k A + b_k A^2$. Expliciter a_k et b_k.

7 Soit A une matrice nilpotente. Calculer le produit $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^p)(I - A)$, et en déduire (en prenant une valeur de p convenable) que la matrice $I_n - A$ est inversible. Qu'en est-il de $I_n + A$? Le même argument s'applique-t-il si A est unipotente ?

8 Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. A l'aide de la formule du binôme (pour un exposant assez grand), montrer que $A + B$ est nilpotente. Montrer par un contre-exemple que la condition $AB = BA$ est nécessaire (on pourra utiliser une matrice antisymétrique d'ordre 2, par exemple)

9 Soit A une matrice (nilpotente) telle que $A^k = 0$. On pose $\exp(A) = I_n + A + A^2/2! + A^3/3! + \cdots + A^{k-1}/(k-1)!$. Justifier la notation en montrant que si A et B sont deux matrices (nilpotentes) qui commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est une matrice inversible (dont on déterminera l'inverse).

10 Quels sont les résultats des questions précédentes qui se généralisent à tout anneau $(A, +, \star)$?