Corrigé du devoir n°5 (fonction Beta)

1 La fonction à intégrer étant continue sur $]0,1[$, il suffit de vérifier qu'elle est définie en 0 et 1 (ou prolongeable par continuité) ; on doit donc avoir $u-1 \geq 0$ et $v-1 \geq 0$, c'est-à-dire $(u,v) \in [1,+\infty[\times [1,+\infty[$. On a

$$B(v,u) = \int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{u-1}\,dt = \int_1^0 (1-T)^{v-1}T^{u-1}(-dT)$$

(à l'aide du changement de variable $T = -t$) et donc (d'après Chasles) $B(v,u) = B(u,v)$. Calculons $B(u,v+1)$: on a

$$\begin{aligned} B(u,v+1) &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v\,dt = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(1-t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt - \int_0^1 t^u(1-t)^{v-1}\,dt = B(u,v) - B(u+1,v) \end{aligned}$$

et donc $B(u,v) = B(u,v+1) + B(u+1,v)$.

2 En intégrant par parties, on a

$$B(u+1,v) = \left[\frac{t^u(1-t)^v}{-v}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{ut^{u-1}(1-t)^v}{-v}\,dt = \frac{u}{v}B(u,v+1)$$

et comme on a déjà obtenu une relation entre cette intégrale et $B(u,v)$, on a $B(u+1,v) = (u/v)(B(u,v) - B(u+1,v))$, donc

$$B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v)$$

En particulier, si u est entier, on va pouvoir exprimer $B(u,v)$ en fonction de $B(1,v)$, puisqu'on aura $B(u,v) = \dfrac{u-1}{u+v-1} \times \dfrac{u-2}{u+v-2} \times \cdots \times \dfrac{1}{v+1}B(1,v)$, et comme $B(1,v) = 1/v$, on a donc

$$B(n,p) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p}$$

Si p est aussi entier, on en déduit la «formule d'Euler»

$$B(n,p) = \frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!}$$

Calculons directement $B(n,p)$ dans le cas n et p entiers : on a (d'après la formule du binôme)

$$B(n,p) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{p-1}^k t^{n+k-1}\,dt = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k C_{p-1}^k}{n+k}$$

et par conséquent on obtient

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k C_{p-1}^k}{n+k} = \frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!}$$

3 $B(3/2,3/2) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,dt$; on peut calculer cette intégrale par le changement de variable $T = t - 1/2$ (forme canonique) puis en posant $X = \operatorname{Arc\,sin} 2T$; mais il est plus rapide de remarquer que le graphe de $f(t) = \sqrt{t - t^2}$ est un demi-cercle, et donc que $B(3/2, 3/2) = \pi/8$

Appliquant (illégalement) la «formule d'Euler», on devrait avoir $B(3/2, 3/2) = \dfrac{(1/2)!^2}{2}$, et donc $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$; c'est ce que confirment les calculettes (la TI-92, ou la HP-48S) de manière approchée, et Maple (exactement). Euler a généralisé la fonction factorielle en définissant, par une autre intégrale, ce qu'il appelle la fonction Gamma : il pose

$$\Gamma(x) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

et il démontre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et que $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$; on a montré par la suite que cette généralisation est (en un certain sens) la meilleure possible, d'où le choix de $\Gamma(x+1)$ comme prolongement de $x!$.

4 Posons $t = \sin^2 x$ (et donc $dt = 2t^{1/2}(1-t)^{1/2}dx$), on obtient (par changement de variable)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(p-1)/2}(1-t)^{(q-1)/2} dt = \frac{B(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2})}{2}$$

l'intégrale est évidemment calculable pour p et q positifs, ce qui semble contredit par le domaine de $B(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2})$ (on devrait en effet avoir p et q supérieurs à 1) Mais en réalité, le changement de variable dans cette direction (correspondant donc à $x = \varphi(t) = \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}$) n'a pas été contrôlé (il n'est pas dérivable en 0 et 1) et il n'est même pas évident que le résultat soit correct quand les fonctions sont définies. Cependant, le changement de variable réciproque $x = \varphi^{-1}(t) = \phi(t) = \sin^2 t$ est légitime dans le calcul de la fonction Beta (c'est-à-dire qu'on a bien $\int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx = \int_0^{\pi/2} \phi(t)^p(1-\phi(t))^q \phi'(t)\, dt$), ce qui justifie le résultat précédent pour p et q supérieurs à 1. Pour comprendre ce qui se passe pour $p < 1$, il faut en fait passer à la limite, comme on va le faire dans les questions suivantes.

Lorsque p et q sont entiers, ces intégrales se calculent facilement par linéarisation. De plus, si $q = 0$, on retrouve les intégrales de Wallis, et la récurrence classique entre ces intégrales correspond à la formule déjà obtenue en **2**.

5 Si la formule précédente était correcte, on aurait

$$B(1/2, 1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^0 x \cos^0 x\, dx = \pi.$$

Montrons que cette valeur est la limite de $\displaystyle\int_x^{1-x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ quand x tend vers 0; en effet, sur l'intervalle $[x, 1-x]$ le changement de variable $t = \sin^2 T$ est légal (bijectif, dérivable et de fonction réciproque dérivable), et on obtient

$$\int_x^{1-x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}^{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x}} 2dT = 2(\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x} - \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x})$$

dont la limite en 0 est bien π.

6 Soit $F(t)$ une primitive de $t^{u-1}t^{v-1}$ (sur $]0, 1[$), on a donc par définition $B^*(u, v) = \lim_{x \to 0} F(1-x) - F(x)$. Si $B(u, v)$ est définie, c'est que F existe sur $[0, 1]$; F étant une primitive est continue et par conséquent $B^*(u, v) = F(1) - F(0) = B(u, v)$; B^* est donc un prolongement de B. On vient de voir qu'elle est définie en $(1/2, 1/2)$; plus généralement, la fonction $F(1-x)-F(x)$ ayant pour dérivée $-f(1-x)-f(x) < 0$, elle est décroissante et aura une limite en 0 si elle est majorée (borne supérieure) (et sinon cette limite sera infinie). Or on a par exemple $t^p(1-t)^q \leq t^p$ si $q \geq 0$, ce qui montre que $F(1-x) - F(x) \leq (1-x)^{p+1} - x^{p+1}/(p+1)$ (pour $p \neq -1$), et par conséquent que $B^*(p, q)$ est définie pour $p > 0$ et q positif. Inversement, si p est ≤ 0, un encadrement analogue montre que la limite donnant B^* est de même nature que celle de $\lim\limits_{x \to 0} x^p$ qui est infinie. On voit qu'il est donc impossible de prolonger B de cette manière à p (ou q) négatif.

Montrons que B^* vérifie les relations de **1** et **2**. C'est évident pour la relation $B^*(p, q+1) + B^*(p+1, q) = B^*(p, q)$ (le calcul ne dépendait pas des bornes) et la relation de «symétrie» $B^*(p, q) = B^*(q, p)$ se déduit de ce que les bornes x et $1-x$ s'échangent dans le changement de variable $T = -t$. La relation de **2** découle d'un passage à la limite : en effet, il subsiste (après intégration par parties) le terme $\left[\frac{t^p(1-t)^q}{-q}\right]_x^{1-x}$, dont la limite est nulle si p et q sont positifs. Finalement, on obtient bien la relation

$$B^*(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B^*(u, v)$$

Comme le terme de gauche est défini pour $u \geq -1$, on peut en déduire un prolongement (si $u \neq 0$) et par exemple on aura $B^*(-1/2, 1/2) = 0$. Mais il semble peu probable que cela corresponde encore à une intégrale, puisqu'on a vu que même en se limitant à $]0, 1[$, B^* devrait devenir infinie.