

Devoir n° 3

L'inéquation $a^x \geq x$

- 1** Étudier (brièvement) la fonction $f_a : x \mapsto f_a(x) = a^x - x$, où a est une constante (positive); on distinguera soigneusement les différents cas possibles.
- 2** Montrer que si $a < 1$, l'équation $f_a(x) = 0$ possède une solution unique, que l'on notera $s(a)$, et qui est comprise entre a et 1 (on admettra que le théorème des valeurs intermédiaires s'applique à f_a).
En déduire la résolution de l'inéquation $a^x \geq x$, quand $a < 1$.
- 3** Montrer que $s(a)$ est une fonction (strictement) croissante de a (on pourra raisonner graphiquement en utilisant par exemple les graphes de a^x et b^x , avec $a < b < 1$, mais on rédigera dans tous les cas un raisonnement rigoureux utilisant des inégalités)
- 4** On étudie à présent le cas $a > 1$. Déterminer la valeur du minimum de $f_a(x)$; en déduire l'existence d'un nombre $a_0 > 1$ pour lequel l'équation $f_a(x) = 0$ possède une solution unique. Déterminer la nature des solutions de l'inéquation $a^x \geq x$ (par exemple le nombre d'intervalles...) pour $a > 1$ (on distinguera les cas $a > a_0$ et $a < a_0$)
- 5** Peut-on définir encore une fonction analogue à $s(a)$? On étudiera éventuellement ses variations, en s'inspirant de **3**.
- 6** Résoudre («exactement») l'équation $a_0^x = x$.
- 7** Montrer (brièvement) que l'étude de la fonction $g(x) = \ln x/x$ redonnerait les mêmes résultats; exprimer $s(a)$ à l'aide de la bijection réciproque g^{-1} d'une restriction convenable de g . Comment faut-il adapter cette «formule» au cas étudié en **5**?
- 8** Utiliser une méthode analogue pour résoudre l'équation $a^x = x^a$; en déduire l'existence d'un couple d'entiers (m, n) (avec $m < n$) unique tel que $m^n = n^m$.