Corrigé du devoir n° 4 (l'inéquation $a^x \geq x$)

1 La fonction f_a a pour dérivée $f'_a(x) = a^x \ln a - 1$, qui est toujours négative si $a \leq 1$, et qui s'annule sinon pour $a^x = 1/\ln a$, c'est-à-dire pour $x \ln a = \ln(1/\ln a)$, soit $x = x_a = (-\ln\ln a)/\ln a$; a^x étant croissante pour $a > 1$, on en déduit qu'alors $f'_a(x)$ est négative jusqu'à $x = x_a$, positive ensuite; et donc que f_a atteint un minimum absolu en x_a, valant $f_a(x_a) = a^{x_a} - x_a = e^{x_a \ln a} - x_a = 1/\ln a - x_a$. Les limites sont obtenues en utilisant les relations de comparaison, ainsi par exemple $\lim\limits_{+\infty} f_a = +\infty$ si $a > 1$, car «l'exponentielle l'emporte» (c'est-à-dire que $x \underset{+\infty}{\ll} e^x$, ou encore que $\lim\limits_{x \to +\infty} x/e^x = 0$). On peut finalement établir les deux tableaux suivants :

$\boxed{\text{Cas } a < 1}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Cas } a > 1}$

x	$-\infty$		$x_a = -\frac{\ln\ln a}{\ln a}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_a(x_a) = \frac{1+\ln\ln a}{\ln a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le cas $a = 1$ ($f_1(x) = 1 - x$) manque d'intérêt : le graphe est une droite, et f_1 s'annule pour $x = 1$.

2 D'après l'étude des limites de f_a (quand $a < 1$), on voit que f_a passe de valeurs positives à des valeurs négatives; comme elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'elle s'annule. Si on avait $f_a(x_1) = f_a(x_2) = 0$, on ne pourrait avoir $x_1 < x_2$, puisque f_a est strictement décroissante; on voit donc que la solution de $f_a(x) = 0$ existe et est unique (on la notera désormais $s(a)$). De plus, $f_a(1) = a - 1 < 0$, et $f_a(a) = a^a - a$ est > 0, puisque a^x est décroissante et que donc $a < 1 \Rightarrow a^a > a^1$; on en déduit que f_a s'annule entre a et 1, et donc que $a < s(a) < 1$. Si alors $x < s(a)$, f_a étant strictement décroissante, on aura $f_a(x) > f_a(s(a)) = 0$, et donc $a^x > x$; on voit de même que pour $x > s(a)$, $a^x < x$, et en définitive, la solution de l'inéquation $a^x \geq x$ est

$$\mathcal{S} =]-\infty, s(a)]$$

3 Pour $a < b < 1$, les fonctions f_a et f_b sont décroissantes, et de plus, pour $x > 0$, on a $a^x < b^x$, et par conséquent $f_a(x) < f_b(x)$. On a donc $f_a(s(a)) = 0 < f_b(s(a))$ (car $s(a) > 0$), et donc $f_b(s(a)) > 0 = f_b(s(b))$. Comme f_b est décroissante, on en déduit que $s(a) < s(b)$ (pour obtenir ce résultat, il serait plus naturel en fait d'utiliser la fonction g^{-1} de la question **7**).

4 On a vu en **1** que le minimum de f_a (pour $a > 1$) est atteint en $x_a = -\ln\ln a/\ln a$, et vaut $(1 + \ln\ln a)/\ln a$; on en déduit que si a est tel que ce minimum est nul, l'équation $f_a(x) = 0$ possédera une solution unique (égale à x_a). Il faut donc déterminer a_0 tel que $1 + \ln\ln a_0 = 0$; on voit que cela équivaut à $a_0 = e^{1/e}$.

Une analyse des variations de f_a montre que si $a \geq a_0$, le minimum de f_a sera positif, et l'inéquation $a^x \geq x$ sera vérifiée pour tout x ($\mathcal{S} = \mathbf{R}$); par contre, si $1 < a < a_0$, on voit que f_a sera négative sur un intervalle $[\alpha_a, \beta_a]$ (avec $\alpha_a < x_a < \beta_a$); on en déduit qu'alors la solution sera

$$\mathcal{S} =]-\infty, \alpha_a] \cup [\beta_a, +\infty[$$

5 Si $1 < a < a_0$, il y a à présent deux solutions (α_a et β_a) à l'équation $a^x = x$; on voit que l'on peut donc définir deux fonctions ($s_1(a) = \alpha_a$ et $s_2(a) = \beta_a$) par des conditions telles que (par exemple) $s_1(a) < x_a$ et $f_a(s_1(a)) = 0$. Montrons que s_1 est croissante (on verrait de même que s_2 est décroissante) : on a (comme en **3**) $a < b \Rightarrow f_a(x) < f_b(x)$, et sur l'intervalle $[-\infty, x_a]$, la fonction f_a est décroissante; comme $x_b > x_a$, il en est de même de f_b. En supposant que $s_1(b) \leq s_1(a) < x_a$; on aurait alors $f_b(s_1(b)) = 0 > f_a(s_1(b))$ et donc $0 > f_a(s_1(b)) > f_a(s_1(a)) = 0$, ce qui est absurde; on voit donc qu'on doit avoir $s_1(b) > s_1(a)$.

6 Par définition de a_0, le minimum (nul) de f_{a_0} est atteint en $x_{a_0} = \dfrac{-\ln\ln a_0}{\ln a_0}$, on voit que l'équation $a_0^x = x$ a pour solution unique $x_0 = (-\ln(1/e))/(1/e)) = e$; il est d'ailleurs évident en effet que $(e^{1/e})^e = a_0^e = e$!

7 Posant $g(x) = \ln x/x$, on a (pour x positif) $a^x \geq x \iff x\ln a \geq \ln x \iff \ln a \geq g(x)$ (et on sait que $a^x > x$ pour tout $x \leq 0$). On voit donc qu'en posant $b = \ln a$, l'étude proposée se ramène à celles d'équations de la forme $g(x) \leq b$; g ayant pour tableau de variation

x	0		$x_0 = e$		$+\infty$
$g'(x) = (1-\ln x)/x^2$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(e)=1/e$	$\searrow$	0

A l'aide de ce tableau, on voit par exemple que l'équation $a^x = x$ admet une solution pour $b \leq 0$, c'est-à-dire pour $a \leq 1$; ou encore une solution unique pour $b_0 = 1/e$, c'est-à-dire pour $a_0 = e^{1/e}$.

Définissons une fonction «réciproque» de g, notée g^{-1}, et allant de $]-\infty, 0]$ vers $]0, 1]$, par la «formule» $g^{-1}(y) = x \iff g(x) = y$ (le théorème des valeurs intermédiaires en garantit l'existence). On aura donc $a^x = x \iff \ln a = g(x) \iff x = g^{-1}(\ln a)$; ainsi,

$$s(a) = g^{-1}(\ln a)$$

Si on définit de même une fonction $h(x)$ (allant de $]0, e^{1/e}]$ vers $]1, e]$) par $h(y) = x \iff g(x) = y$ et $x \leq e$, on aura

$$s_1(a) = h(\ln a)$$

8 Avec les notations précédentes, $a^x = x^a \iff x\ln a = a\ln x \iff g(x) = g(a)$; comme g est injective sur $]0, 1]$, on voit que si $a \in]0, 1]$, la seule solution sera $x = a$. Si $a \in]1, e[$, une seconde solution apparait, car la fonction g prend deux fois chaque valeur; en notant par exemple k la fonction allant de $]0, e^{1/e}]$ vers $[e, +\infty[$ telle que $k(y) = x \iff g(x) = y$ et $x \geq e$, on aura comme seconde solution $x = k(g(a))$. En particulier, comme le seul entier m de l'intervalle $]1, e]$ est 2, on voit que l'équation $m^n = n^m$ ne peut avoir qu'une solution (telle que $m < n$) au plus; on constate sur le graphe de g que $n = 4$ pourrait convenir, et en effet $2^4 = 4^2 = 16$.