Devoir n° 2

Racines de l'unité : la formule des «sommes de Gauss»

1 Résoudre (dans $\mathbf{C}$) l'équation $z^7 = 1$ (rappeler brièvement la méthode utilisée); on appelle u la solution de parties réelles et imaginaires strictement positives (on vérifiera qu'il n'y en a qu'une). Exprimer toutes les solutions sous forme de puissances de u; tracer l'image des solutions dans le plan complexe (on ne demande pas une construction exacte).

2 Factoriser (à l'aide de u) le polynôme $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

3 On pose $a = u+u^2+u^3$. Remarquer que $P(u) = 0$, et en déduire que $\Re(a) = -1/2$. Y-a-t-il une interprétation géométrique de ce résultat ? En déduire une relation entre $\cos 2\pi/7$, $\cos 4\pi/7$ et $\cos 6\pi/7$. Posant $\alpha = 2\pi/7$, et utilisant les formules de duplication et de triplication (donnant $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$), montrer que $X = \cos\alpha$ est racine d'un polynôme du 3ème degré à coefficients entiers, et déterminer les autres racines de ce polynôme.

4 On pose à présent $s = 1 + u + u^4 + u^9 + u^{16} + u^{25} + u^{36}$ (en utilisant les notations du chapitre 5, on a donc $s = \sum_{k=0}^{6} u^{k^2}$). Simplifier l'écriture de s et le calculer (numériquement, c'est-à-dire en utilisant les valeurs (à 10^{-9} près) des cos et sin des angles obtenus en **1**). Que constate-t-on ?

5 Montrer (directement) que $s - 2a - 1$ est imaginaire pur; calculer s^2 (sous forme de somme de puissances de u); vérifier que s^2 est bien un entier négatif.

6 On veut généraliser ce résultat au cas $z^n = 1$. On appelle à présent u la solution de «plus petit argument» (non nul). Déterminer, pour $n = 3$, 4, 5 et 6, la valeur de l'analogue de s (ce nombre, $s(n) = \sum u^{k^2}$, avec k variant entre des bornes qu'on précisera, s'appelle une «somme de Gauss»); vous utiliserez les valeurs «exactes» de u déterminées en cours; si votre «analogie» est correcte, vous devriez obtenir (pour n impair) des formules assez simples. Écrire un programme permettant de calculer numériquement $s(n)$; contrôler que $s(102) = 0$, et que $s(121) = 11$. Étudier la liste des valeurs calculées (pour $10 \leq n \leq 100$, par exemple); quelle conjecture peut-on formuler ? La vérifier (rigoureusement, sans passer par des valeurs approchées) pour $n = 9$. Pensez-vous que l'établissement de cette liste de valeurs constitue une démonstration ? Sinon, que faudrait-il faire de plus ?