Corrigé du devoir n° 1 (méthode de Cardan)

1 Substituons $X - A$ à x dans l'équation $(\star)$ $\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (avec $a \neq 0$) ; nous obtenons $a(X-A)^3 + b(X-A)^2 + c(X-A) + d = 0$, et donc, en développant,

$$aX^3 + (b - 3aA)X^2 + (c - 2bA + 3aA^2)X + d - cA + bA^2 - aA^3 = 0.$$

Choisissant $A = b/3a$, on voit que le terme en X^2 s'annule, et donc que l'équation $(\star)$ équivaut au système $X = x + A = x + b/3a$ et $(\star\star)$ $\quad X^3 = pX + q$, où p et q sont donnés par

$$p = \frac{-3aA^2 + 2bA - c}{a} = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2}$$
$$q = \frac{aA^3 - bA^2 + cA - d}{a} = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{27a^3}$$

On en déduit (après substitution) que l'équation $8x^3 - 24x^2 + 40x - 33 = 0$ équivaut au système $X = x - 1$ et $X^3 = -2X + 9/8$.

2 Introduisons une nouvelle inconnue $u \neq 0$ telle que $X = u + p/3u$ (ce qui revient à introduire u et v, avec $u + v = X$ et $3uv = p$). L'équation $(\star\star)$ devient alors $u^3 + pu + p^2/3u + p^3/27u^3 = pu + p^2/3u + q$, qui équivaut ($u$ n'étant pas nul) à $u^6 - qu^3 + p^3/27 = 0$. Cette dernière équation se ramène à une équation du second degré : $(\star\star\star)$ $U^2 - qU + p^3/27 = 0$, par le changement d'inconnue $U = u^3$ (et on reviendra aisément à u, puisqu'on sait que tout réel admet une racine cubique unique, notée $u = \sqrt[3]{U} = U^{1/3}$) ; $(\star\star\star)$ admet des solutions réelles si, et seulement si, $4p^3 - 27q^2 \leq 0$.

3 Pour que $u = 0$ soit solution de l'équation précédente, il faut (et il suffit) que $p = 0$. Dans ce cas, le changement d'inconnue de **2** ne saurait évidemment convenir, mais en revanche, l'équation $(\star\star)$, $X^3 = q$, possède la solution évidente (et unique) $X = q^{1/3}$; ce cas ne présente donc pas d'inconvénient pratique.

4 Si $U_1 \neq 0$ est solution de $(\star\star\star)$ (et donc si $4p^3 - 27q^2 \leq 0$), c'est que $u_1 = U_1^{1/3}$ est solution de $u^3 + pu + p^2/3u + p^3/27u^3 = pu + p^2/3u + q$, et donc que $X_1 = u_1 + p/3u_1$ est solution de $(\star\star)$. Ainsi, à chaque solution (non nulle) de $(\star\star\star)$ correspond une solution de $(\star\star)$; comme le produit des deux solutions U_1 et U_2 de $(\star\star\star)$ vaut $p^3/27$, c'est que $u_1u_2 = p/3$; en définitive, on aura $X_1 = u_1 + p/3u_1 = p/3u_2 + u_2 = X_2$, et cettte méthode ne peut donc donner (au plus) qu'une solution de $(\star\star)$ (et on voit qu'en aucun cas, il ne peut apparaître de solutions parasites). Réciproquement, si X_0 est solution de $(\star\star)$, et qu'il existe un $u_0 \neq 0$ tel que $X_0 = u_0 + p/3u_0$, $U_0 = u_0^3$ sera solution de $(\star\star\star)$, mais cela ne se produit que si l'équation $u^2 - uX_0 + p/3$ admet des solutions (réelles), c'est-à-dire si $X_0^2 \geq 4p/3$; on verra en **6** qu'on peut ne pas être dans ce cas, et que donc la méthode peut ne pas trouver toutes les solutions, ou même n'en trouver aucune, alors qu'il en existe.

5 Appliquons la méthode précédente à l'équation $X^3 = -2X + 9/8$. On est donc amené à résoudre $u^6 - 9u^3/8 - 8/27$, puis l'équation du second degré en $U = u^3$: $(\star\star\star)$ $U^2 - 9U/8 - 8/27 = 0$, d'où la solution

$$U_1 = \frac{9}{16} + \frac{11\sqrt{105}}{144} \text{ et } U_2 = \frac{9}{16} - \frac{11\sqrt{105}}{144},$$

puis $X = \sqrt[3]{U_1} - 2/3\sqrt[3]{U_1}$, et la solution analogue pour U_2 (la remarque faite en **4** montrant que ces deux solutions sont en fait égales). Or, bien que la formule finale soit si effrayante qu'on ne l'a pas recopiée, la calculatrice montre que ce nombre vaut $0,4999999\ldots$ (à 10^{-12} près); on pourrait donc penser que U_1, par exemple, est un cube parfait. Ce n'est pourtant pas le cas; ainsi, à ce stade du calcul, il est seulement extrêmement vraisemblable que $1/2$ soit solution de $(\star\star)$, mais il est aisé de contrôler que c'est bien le cas, puisque $(1/2)^3 = 1/8 = -2(1/2) + 9/8$. On obtient alors facilement (par identification) la factorisation $X^3 + 2X - 9/8 = (X-1/2)(X^2+X/2+9/4)$, et le trinôme $X^2+X/2+9/4$ n'ayant pas de racines réelles (puisque son discriminant vaut $-35/4$), on voit finalement que l'équation $(\star\star)$ a pour seule solution (réelle) $X = 1/2$; revenant à $x = X+1$ (comme on l'a vu en **1**), l'équation $(\star)$ $8x^3 - 24x^2 + 40x - 33 = 0$ a donc pour solution $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

6 Déterminons les variations de $f\colon x \mapsto f(x) = x^3 - px - q$; on a $f'(x) = 3x^2 - p$. Si p est négatif, f est donc (strictement) croissante, et comme elle varie de $-\infty$ à $+\infty$, elle s'annule pour une valeur unique x_0, qui sera donc l'unique solution de $(\star\star)$. Si p est positif, f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{p/3}\,]$ et sur l'intervalle $[\sqrt{p/3}, +\infty[$; et décroissante sur $[-\sqrt{p/3}, \sqrt{p/3}\,]$. Elle a donc un maximum (relatif) en $-\sqrt{p/3}$, qui vaut $f(-\sqrt{p/3}) = (2p/3)\sqrt{p/3} - q$; et un minimum relatif (en $\sqrt{p/3}$), qui vaut $f(\sqrt{p/3}) = -(2p/3)\sqrt{p/3} - q$; ce qui correspond au «tableau de variation»

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
x & -\infty & & -\sqrt{\frac{p}{3}} & & \sqrt{\frac{p}{3}} & & +\infty \\ \hline
f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline
 & & & \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}-q & & & & +\infty \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & -\infty & & & & -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}-q & &
\end{array}$$

On voit sur ce tableau (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) que $(\star\star)$ (et par conséquent aussi $(\star)$) aura toujours au moins une solution, et qu'il y en aura trois si et seulement si les deux valeurs qu'on vient de trouver sont de signes opposés, c'est-à-dire si leur produit $f(-\sqrt{p/3})f(\sqrt{p/3}) = q^2 - 4p^3/27$ est négatif; or ce nombre est de toute façon positif si p est négatif. On aboutit donc, en regroupant les deux cas possibles sur le signe de p, à la «condition de Cardan» : il y a trois «solutions» si et seulement si $4p^3 - 27q^2 > 0$ (et deux solutions si $4p^3 - 27q^2 = 0$). On peut remarquer que c'est précisément dans ce cas que l'équation $(\star\star\star)$ n'a pas de solutions (réelles), et donc que la méthode vue en **2** donne bien une solution (unique) quand il n'y en a qu'une, et échoue quand il y en a trois !

7 Et c'est bien parce qu'il est clair que $(\star\star)$ a toujours des solutions que les mathématiciens italiens du $16^{\text{ème}}$ siècle s'enhardirent à introduire des valeurs «imaginaires» de U, en espérant des simplifications analogues à celles de **4**, qui leur donneraient le moyen de «deviner» les solutions réelles dont ils connaissaient *a priori* l'existence. Examinons par exemple le cas $p = 3$, $q = 0$. On a l'équation $X^3 = 3X$, de solution $\mathcal{S} = \{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$. L'équation $(\star\star\star)$ devient $U^2+1 = 0$, et donc $U = i$ (en utilisant une notation moderne; les textes italiens n'hésitent pas à écrire $U = \sqrt{-1}$, et même $u = \sqrt[3]{\sqrt{-1}}$!). On voit donc que pour pouvoir utiliser cette méthode, il faut «inventer» une «racine cubique» à i. On constate aisément que $-i$ convient ($i^3 = -i$, donc $(-i)^3 = i$), mais on n'obtient ainsi que la solution $X = 0$; pour obtenir les autres, on peut par exemple remarquer que $u^3 - i = (u+i)(u^2 - iu - 1)$, résoudre l'équation du second degré par la méthode habituelle, obtenant $u = (\sqrt{3} \pm i)/2$, et contrôler (par calcul direct) qu'on a bien $u^3 = i$ (et donc que i possède (au moins) trois «racines cubiques», à savoir $-i$, u_1 et u_2) ; il n reste plus alors qu'à calculer $u + 1/u$ (ce qu'on peut faire en remarquant qu'on doit avoir $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i) = 2$), obtenant finalement $X = \sqrt{3}$; c'est ce genre de manipulations, et la confiance progressive dans les résultats ainsi obtenus (en dépit du caractère «magique» des calculs) qui ont amené à la construction rigoureuse des complexes au siècle suivant.