

IX. Suites

Exercice 1

On considère l'ensemble $E = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, déterminer s'ils existent son plus grand élément, son plus petit élément, sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 2

Montrer qu'il existe une unique suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_7 = 6, 8$ et $u_{19} = 23, 6$. Déterminer alors u_{53} .

Exercice 3

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est géométrique. Déterminer $\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 4

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

Exercice 5

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement positive est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$.

Exercice 6

Déterminer une forme explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Exercice 7

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^n + n}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est bornée.

Exercice 9

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$ est croissante.

Exercice 10

Déterminer en fonction de u_0 le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (on pourra s'intéresser à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

Exercice 12

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes strictement positifs tels que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{3}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 13

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{(-2)^n + 3n}{3^n - 2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{(n-1)\sin(n+1) - (n+1)\sin(n-1)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15

Étant donné un réel x , étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

Démontrer que $x \geq \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$, en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 17

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $0 \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 18

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{2}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont adjacentes, en déduire qu'elles convergent vers une même limite $l \in [2; 3]$.

Exercice 19

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente.
(on pourra s'intéresser aux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$)

Exercice 20

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{4^{n+1} + n^3}{2^n + n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Que penser de la notation $u_n = o(o(v_n))$?

Exercice 22

Montrer que $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = O(n^4)$.

Exercice 23

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = \alpha + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 24

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.