

## XI. Limites

### Exercice 1

La fonction  $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$  admet-elle une limite, une limite à gauche ou une limite à droite en 0 ?

### Exercice 2

Étudier la limite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x^2 + 1}$ .

### Exercice 3

Étudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1) - x$ .

### Exercice 4

Étudier la limite à gauche et à droite en 1 des fonctions  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$  et  $g : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ .

### Exercice 5

Étudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$ .

### Exercice 6

Étudier la limite à gauche et à droite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ .

### Exercice 7

La fonction  $f : x \mapsto x \cos x$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?

### Exercice 8

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 9

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  peut se prolonger par continuité en 0.

### Exercice 10

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11**

On considère une fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant une limite finie en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée.

**Exercice 12**

Montrer que l'équation  $x^3 - x + 1 = 0$  admet une unique solution réelle et en donner un encadrement à l'unité.

**Exercice 13**

Montrer que toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0; 1], [0; 1])$  admet un point fixe.  
(On pourra considérer la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x - f(x)$ )

**Exercice 14**

Déterminer l'image directe de l'intervalle  $[-2; 2]$  par la fonction  $f : x \mapsto -\frac{1}{5}x^3 + \frac{9}{5}x$ .

**Exercice 15**

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1; 1[$  et expliciter son application réciproque.

**Exercice 16**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$ .

Déterminer un équivalent simple de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  puis au voisinage de 1.

**Exercice 17**

On considère trois fonctions  $f, g$  et  $h$  à valeurs réelles définies sur un voisinage de  $+\infty$ . Montrer que si  $f \underset{+\infty}{=} o(g)$  et  $g \underset{+\infty}{=} O(h)$  alors  $f \underset{+\infty}{=} o(h)$ .

**Exercice 18**

Déterminer un équivalent simple en  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto [x - \ln x]$ .

**Exercice 19**

Déterminer un équivalent simple en  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$ .

**Exercice 20**

On considère deux fonctions  $f, g$  à valeurs réelles  $f \underset{+\infty}{\sim} g$ , a-t-on  $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$  ?