

XI. Limites

Exercice 1

La fonction $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$ admet-elle une limite, une limite à gauche ou une limite à droite en 0 ?

Exercice 2

Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x^2 + 1}$.

Exercice 3

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1) - x$.

Exercice 4

Étudier la limite à gauche et à droite en 1 des fonctions $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$ et $g : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

Exercice 5

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$.

Exercice 6

Étudier la limite à gauche et à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 7

La fonction $f : x \mapsto x \cos x$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 8

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ peut se prolonger par continuité en 0.

Exercice 10

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 11

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 12

Montrer que l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle et en donner un encadrement à l'unité.

Exercice 13

Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0; 1], [0; 1])$ admet un point fixe.
(On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x - f(x)$)

Exercice 14

Déterminer l'image directe de l'intervalle $[-2; 2]$ par la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{5}x^3 + \frac{9}{5}x$.

Exercice 15

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1; 1[$ et expliciter son application réciproque.

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$.

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$ puis au voisinage de 1.

Exercice 17

On considère trois fonctions f, g et h à valeurs réelles définies sur un voisinage de $+\infty$. Montrer que si $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ et $g \underset{+\infty}{=} O(h)$ alors $f \underset{+\infty}{=} o(h)$.

Exercice 18

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto [x - \ln x]$.

Exercice 19

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$.

Exercice 20

On considère deux fonctions f, g à valeurs réelles $f \underset{+\infty}{\sim} g$, a-t-on $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?