

## XV. Intégration

**Exercice 1**

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$  en étudiant les sommes de Riemann de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

**Exercice 2**

Montrer que  $F : x \mapsto \ln|1+x|$  est une primitive de  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $] -1; +\infty[$ .

**Exercice 3**

Déterminer une primitive sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction tangente.

**Exercice 4**

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto e^x \sin x$ .  
(on pourra la chercher sous la forme  $F : x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^x$ )

**Exercice 5**

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto e^x (\sin x)^2$ .  
(on pourra linéariser)

**Exercice 6**

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$ .

**Exercice 7**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$ , montrer qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{c}{1+x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et en déduire une primitive de  $f$  sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $] -1; +\infty[$ .

**Exercice 8**

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan t)^2 dt$ .

**Exercice 9**

Calculer  $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| dt$ .

**Exercice 10**

Calculer  $\int_0^1 (1+t)\sqrt{t} dt$ .

**Exercice 11**

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\cos t)^2} dt$ . (on pourra effectuer une intégration par parties)

**Exercice 12**

Calculer  $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$ . (on pourra effectuer une intégration par parties)

**Exercice 13**

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction arctangente. (on pourra effectuer une intégration par parties)

**Exercice 14**

Calculer  $\int_1^e t(\ln t)^4 dt$ . (on pourra effectuer des intégrations par parties successives)

**Exercice 15**

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^3 dt$ . (on pourra utiliser le changement de variable  $x = \sin t$ )

**Exercice 16**

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t}$ . (on pourra utiliser le changement de variable  $x = \tan \frac{t}{2}$ )

**Exercice 17**

Exprimer  $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  en fonction de  $\tan x$  et en déduire  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$ .  
(on pourra utiliser un changement de variable)

**Exercice 18**

Démontrer que  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+$  en utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

**Exercice 19**

Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  en  $x = 0$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  en utilisant la formule de Taylor-Young.

**Exercice 20**

Déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $f : x \mapsto x(2 + \cos x) - 3 \sin x$ .

**Exercice 21**

Étudier la limite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$ .

**Exercice 22**

Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  en  $x = -1$  de  $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ .  
(on pourra utiliser le changement de variable  $X = x + 1$ )

**Exercice 23**

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en  $x = 1$  de  $x \mapsto \frac{1 + x^3}{1 + x + x^2}$ .  
(on pourra utiliser le changement de variable  $X = x - 1$ )

**Exercice 24**

Étudier la limite en 1 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1 - \sqrt{x}}$ .  
(on pourra utiliser le changement de variable  $X = x - 1$ )

**Exercice 25**

Montrer que la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$  admet une asymptote oblique  $\mathcal{T}$  en  $+\infty$  puis étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$  au voisinage de  $+\infty$ .  
(on pourra utiliser le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$  et calculer un développement limité)

**Exercice 26**

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$  se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0 et déterminer  $f(0)$  et  $f'(0)$ .

**Exercice 27**

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en  $x = 0$  de la fonction  $x \mapsto \sqrt{1 + \sin x}$ .

**Exercice 28**

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arccos en 0.  
(on pourra procéder par intégration)