

## III. Fonctions

**Exercice 1**

Déterminer le meilleur encadrement possible de  $2x^2 + 1$  pour  $-3 \leq x \leq 5$ .

**Exercice 2**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 7x + 8}{x - 2}$ . Déterminer son ensemble de définition, déterminer ses limites aux bornes de cet ensemble, étudier ses variations puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant figurer ses tangentes horizontales.

**Exercice 3**

Représenter graphiquement la fonction *partie fractionnaire* :  $x \mapsto x - [x]$ .

**Exercice 4**

Résoudre l'équation  $[2x] = 2[x]$ .

**Exercice 5**

Simplifier l'expression  $\frac{e^x + 1}{e^{x-1}} - e$ .

**Exercice 6**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $3e^x - e^{2x} \geq 2$ .

**Exercice 7**

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

**Exercice 8**

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$  puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

**Exercice 9**

Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**Exercice 10**

Démontrer l'encadrement  $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$  pour  $x \geq 0$ , en déduire la limite en  $0_+$  de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

**Exercice 11**

Démontrer que pour  $x$  et  $y$  deux nombres réels strictement positifs on a  $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$ .

**Exercice 12**

Résoudre l'équation  $x\sqrt{x} = \sqrt{x^x}$ .

**Exercice 13**

Démontrer que  $\ln x \leq x - 1$  pour  $x > 0$ , en déduire que  $\pi^e \leq e^\pi$ .

**Exercice 14**

Étudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Exercice 15**

Étudier sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - 2 \sin x$ .

**Exercice 16**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

**Exercice 17**

Résoudre l'équation  $\arcsin x = \arccos \frac{1}{4} - \arccos \frac{1}{3}$ .

**Exercice 18**

Démontrer que  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  pour  $x \in [-1; 1]$ .

**Exercice 19**

Simplifier  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 20**

Montrer que la fonction  $x \mapsto x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$  est dérivable sur l'intervalle  $] -1; 1[$  puis calculer sa dérivée. En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$  et retrouver ce résultat géométriquement.