XII. Espaces vectoriels

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
L'ensemble des suites réelles qui divergent vers $+\infty$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

Exercice 3

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 4

L'ensemble des fonctions monotones est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 6

Montrer que l'ensemble des fonctions constantes et l'ensemble des fonctions s'annulant en 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires et l'ensemble des fonctions s'annulant en 1 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 8

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 9

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P'(0) = 0\}$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 10

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, déterminer $\mathrm{Vect}(1, i)$.

Exercice 11

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right), k \in [\![0;7]\!])$.

Exercice 12

$((X-1)(X-2), (X-2)(X-3), (X-1)(X-3))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 13

Montrer que si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre alors $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})$ est une famille libre.

Exercice 14

Montrer que $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15

Donner une base de $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 16

Montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 17

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de la matrice identité I_2 dans cette base.

Exercice 18

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+2y+3z=0 \right\}$ puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19

Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(1+X+X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 20

Trouver le rang de la famille de vecteurs $(1+X, 1-X, 1+X^2, 1-X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.