XIII. Dérivation

Exercice 1

La fonction $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2+x+2 & \text{si} & x<1 \\ x^2+3x+1 & \text{si} & x \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ peut se prolonger par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $[0;+\infty[$. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable sur $[0;+\infty[$?

Exercice 3

On considère $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que si f est paire alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 4

Étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{3} \\ x\neq \frac{\pi}{3}}} \dfrac{2\cos x - 1}{\pi - 3x}$.

Exercice 5

Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est dérivable en $a \in I$ alors $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.

Exercice 6

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} ke^{kx}$.

Exercice 8

Montrer que $\arctan\left(\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) = 2 \arctan\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est n fois dérivable sur $]-1;1[$ et déterminer $f^{(n)}(x)$.
En déduire que les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sont n fois dérivables sur $]-1;1[$ et déterminer $g^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(x)$.

Exercice 10

Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2+x+1)e^{-x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée n-ième.
(on pourra utiliser la formule de Leibniz)

Exercice 11

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t^3y' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique, montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 15

On considère $f, g \in \mathcal{D}([a;b], \mathbb{R})$ avec g' ne s'annulant pas sur $[a;b]$. Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$)

Exercice 16

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $x\cos x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 17

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 18

On considère l'équation (E) : $(x-1)e^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et l'encadrer par deux entiers consécutifs.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (b) Montrer que $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $|u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2{u_n}^3}{2{u_n}^2-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 = \pm\dfrac{1}{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 20

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(2-\ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 \in]0;e]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par e et en déduire qu'elle converge vers e.
3. Montrer que si $u_0 \in]0;e]$ alors $e-u_{n+1} \leqslant (e-u_n)(1-\ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que si $u_0 \in [1;e]$ alors $e-u_{n+1} \leqslant (e-u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.