XIV. Applications linéaires

Exercice 1

Montrer que $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$ est une forme linéaire. ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2

Montrer qu'une forme linéaire f sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est soit nulle soit surjective.

Exercice 3

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

Exercice 4

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 5

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 6

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ g$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

Exercice 7

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $f(\mathrm{Ker}\ g \circ f) = \mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ f$.

Exercice 8

Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et expliciter son application réciproque.
(on pourra utiliser des dérivées successives)

Exercice 9

Étant donné $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on définit $p(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ et $s(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$, montrer que p est un projecteur et s une symétrie et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quelconque par la projection sur F parallèlement à G puis par la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 11

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer l'image d'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ quelconque par la symétrie s par rapport à $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(1, X)$.

Exercice 12

Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $s = 2p - Id$ est une symétrie.

Exercice 13

Montrer que si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie alors $\text{Im}(s + Id) = \text{Ker}(s - Id)$.

Exercice 14

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, que peut-on dire de $\text{rg}(-f)$ et $\text{rg}(2f)$?

Exercice 15

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, montrer que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg } f + \text{rg } g$.

Exercice 16

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Exercice 17

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ est une application linéaire et déterminer sa matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 18

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ainsi que la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{j})$.

Exercice 20

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$. Montrer que ϕ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21

On considère une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 22

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur p dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 23

Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie s dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 24

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 25

On considère l'endomorphisme f de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Ker}f$ est de dimension 1 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_1}')$, montrer que $\mathrm{Im}f$ est de dimension 2 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$, montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M' de f dans celle-ci.

Exercice 26

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 28

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ.