Devoir surveillé de Mathématiques n°4

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (étude d'une courbe paramétrée)

On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (\sin t)^3 \\ y(t) & = & \sin(3t) \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une symétrie.
2. Calculer le vecteur vitesse de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{3}$ et en déterminer une équation cartésienne.
4. Montrer que l'on peut réduire l'étude de la courbe $\mathcal{C}$ à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Dresser le tableau de variations de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal d'unité 5cm en faisant figurer les tangentes horizontales et verticales ainsi que la tangente au point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2 (cercle principal d'une ellipse)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $c^2 = a^2 - b^2$ et on note O le centre, $F(c;0)$ un des foyers et $M_0(x_0;y_0)$ un point quelconque de $\mathcal{E}$.

1. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à l'ellipse $\mathcal{E}$ en M_0.
2. Déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour que la tangente $\mathcal{T}$ rencontre l'axe focal de l'ellipse $\mathcal{E}$ et donner, lorsque cette condition est vérifiée, les coordonnées du point d'intersection.
3. On appelle P le projeté du point O sur la tangente $\mathcal{T}$ parallèlement à la droite (M_0F).
   (a) On se place dans le cas ou la tangente $\mathcal{T}$ et l'axe focal sont parallèles, calculer OP^2.
   (b) On se place dans le cas ou la tangente $\mathcal{T}$ et l'axe focal se croisent en un point I. Calculer IO^2, IF^2 et M_0F^2 en fonction de a, c et x_0. En déduire OP^2.
   (c) Montrer que le point P appartient à un cercle dont on précisera le centre ainsi que le rayon.

Exercice 3 (suite arithmético-géométrique)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la forme récurrente $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 3u_n + 2 \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit géométrique, en déduire une forme explicite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (calcul de sommes)

On considère un entier naturel n et on définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^n \end{array}$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la formule du binôme, en déduire une nouvelle expression de $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Calculer $f(1)$, en déduire la valeur de la somme $S_0 = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$.
4. Calculer $f'(1)$, en déduire la valeur de la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k}$.
5. Calculer $f''(1)$, en déduire la valeur de la somme $S_2 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k}$.